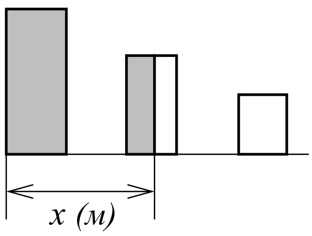
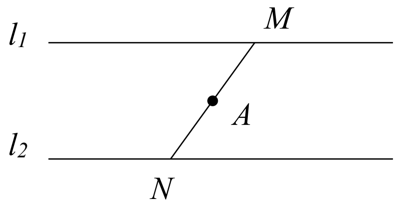
Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2020

1. *Три прямоугольника, высоты которых соответственно равны 3 м, 2 м и 1 м, а основания одинаковы и равны 1 м, отстоят друг от друга на расстояние 1 м. Запишите функцию, выражающую площадь закрашенной фигуры (см. рис.) при любом значении переменной* $x \in [0;+\infty)$.

Решение. $S(x)=\begin{cases} 3x, & 0 \le x < 1, \\ 3, & 1 \le x < 2, \\ 2x-1, & 2 \le x < 3, \\ 5, & 3 \le x < 4, \\ x+1, & 4 \le x < 5, \\ 6, & x \ge 6. \end{cases}$



2. *Составьте уравнение прямой, которая симметрична прямой* $3x+y-5=0$ *относительно точки* $A(-1;4)$.

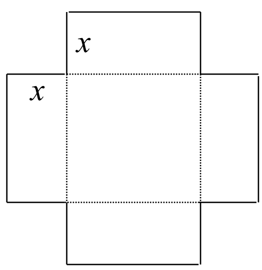


Решение. Пусть l_1 и l_2 – данная и искомая прямые соответственно. Точка $M(1;2)$ принадлежит прямой l_1. Найдем точку N, симметричную точке M относительно точки A. Для этого воспользуемся формулой нахождения координат середины отрезка:

$$x_A=\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{1+x_N}{2}=-1,\quad y_A=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{2+y_N}{2}=4.$$

Отсюда $N(-3;6)$. Прямая l_2 проходит через точку N параллельно прямой l_1, ее уравнение имеет вид $3x+y+C=0$. Подставляя координаты точки N, получим $C=3$. Следовательно, $3x+y+3=0$ – уравнение искомой прямой.

3. *Из куска жести размером* 10×10 *дм необходимо изготовить коробку (без крышки) наибольшего объема, вырезая равные квадраты по углам листа и затем загибая края для образования боковых стенок коробки. Найдите наибольший возможный объем такой коробки.*



Решение. Пусть x *дм* – длина стороны вырезаемого квадрата. Рассмотрим функцию

$$V(x)=(10-2x)^2\cdot x=4x^3-40x^2+100x,$$

выражающую объем изготовленной коробки, и найдем ее наибольшее значение на отрезке $[0;5]$. Для этого, решая уравнение

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 0,$$

найдем критические точки функции $x_1 = 5,\ x_2 = \frac{5}{3}$.

Так как $V\left(\frac{5}{3}\right) = 74\frac{2}{27}$, $V(0) = V(5) = 0$, то наибольшее значение функции на отрезке $[0;5]$ достигается в точке $x_2 = \frac{5}{3}$, т.е. наибольший возможный объем коробки равен $74\frac{2}{27}$ литра.

4. *Найдите все значения* λ*, при которых матричное уравнение*

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Обозначим $A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Если $\det A \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$X = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, значения λ, при которых уравнение (1) имеет бесконечно много решений, надо искать среди корней уравнения

$$\det A = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которыми являются числа $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 6$.

Пусть $\lambda = -1$, тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1, \\ 4b + 2d = -2, \\ 6a + 3c = -2, \\ 6b + 3d = 4, \end{cases}$$

которая несовместна.

При $\lambda = 6$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3a+2c=1, \\ -3b+2d=-2, \\ 6a-4c=-2, \\ 6b-4d=4, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений: $\left(\frac{2}{3}c-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}d+\frac{2}{3}, c, d\right), c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$.

Следовательно, искомое значение $\lambda = 6$.

5. *Решите уравнение* $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2n}\right)\right) = 2020$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2n}\right)}{1-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2n}\right)}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-x^4\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2n}\right)}{1-x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{4n}}{1-x} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } |x|>1, \\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{если } |x|<1. \end{cases}$$

Получаем $\frac{1}{1-x} = 2020$ и $x = \frac{2019}{2020}$.

6. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0;4]$ и удовлетворяет условиям: $f(0)=0,\ f(4)=4,\ |f'(x)| \le 2$. Докажите, что $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x) < 6$.

Решение. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует точка $c \in (0;4)$ такая, что $f(c) > 6$. По теореме Лагранжа найдутся такие точки $\xi \in (0;c)$ и $\eta \in (c;4)$, что будут выполняться равенства

$$f(c)-f(0) = f'(\xi)\cdot c, \quad f(4)-f(c) = f'(\eta)(4-c). \qquad (2)$$

Так как $f(c)-f(0) = f(c) > 6$ и $f'(\xi) \le 2$, то $c > 3$. Поскольку $f(4)-f(c) = 4-f(c) < -2$, в силу второго из равенств (2) получим неравенство $\left|f'(\eta)(4-c)\right| = \left|f'(\eta)\right|(4-c) > 2$, что невозможно, так как $\left|f'(\eta)\right| \le 2$ и $4-c<1$. Таким образом, наше предположение о существовании точки c неверно, следовательно $f(x) < 6$ при всех $x \in [0;4]$.