Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2019

1. *Найдите интеграл* $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+1\right)}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+1\right)} = \int \frac{x^9 dx}{x^{10}\left(x^{10}+1\right)} = \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{x^{10}+1}\right) d\left(x^{10}\right) = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right| + C.$

2. *Найдите все возможные значения предела* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)^x$, $a, b > 0$.

Решение. Пусть $a \neq 1$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a>1, \\ 0, & \text{если } a<1. \end{cases}$

Если $a=1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}}\right)^b = e^b.$

3. *При каких значениях параметра* λ *система*

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет бесконечно много решений? Найдите эти решения.

Решение. Если определитель системы (1) не равен 0, то система имеет единственное решение. Следовательно, искомое значение λ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтем из первой строки определителя вторую строку и разложим полученный определитель по элементам первой строки. Получим уравнение

$$(1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Если $\lambda = 1$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, $x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.

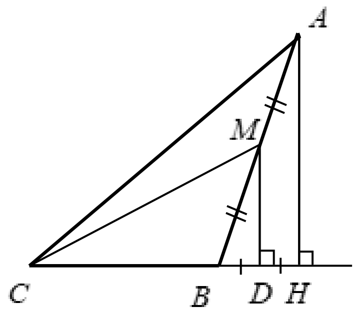
При $\lambda = 3$ получим систему

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

которая несовместна (достаточно прибавить к третьему уравнению второе).

4. *Составьте уравнения сторон треугольника, зная его вершину* $B(2;-7)$*, а также уравнения высоты* $3x + y + 11 = 0$ *и медианы* $x + 2y + 7 = 0$*, проведенных из разных вершин.*

Решение. Несложно проверить, что точка B не принадлежит ни высоте, не медиане из условия задачи. Пусть AH – высота, а CM – медиана (см. рисунок). В силу перпендикулярности прямых BC и AH имеем $k_{BC} = -\dfrac{1}{k_{AH}} = \dfrac{1}{3}$. Составим уравнение прямой



$$BC:\ y + 7 = \frac{1}{3}(x - 2) \ \Leftrightarrow\ 3y - x + 23 = 0.$$

Решив системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 7 = 0, \\ 3y - x + 23 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y + 11 = 0, \\ 3y - x + 23 = 0 \end{cases}$$

найдем $C(5;-6)$ и $H(-1;-8)$ соответственно (поэтому точка H лежит на продолжении стороны BC). Найдем середину $D(0,5;-7,5)$ отрезка BH и составим уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно высоте AH: $3x + y + 6 = 0$.

Решим систему

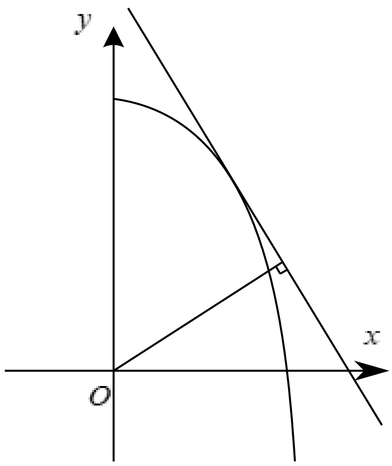
$$\begin{cases} x + 2y + 7 = 0, \\ 3x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

и найдем $M(-1;-3)$. Так как точка M – середина отрезка AB, то $A(-4;1)$.

Используя уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки, получим уравнения $7x + 9y + 19 = 0$ и $4x + 3y + 13 = 0$ прямых AC и AB соответственно.

5. *Составьте уравнение касательной к кривой* $x = \sqrt{4,5 - y}$*, наименее удаленной от начала координат.*

Решение. Рассматриваемая кривая – правая ветвь параболы $y = 4,5 - x^2$. График функции является выпуклым на всей числовой прямой, поэтому любая касательная расположена не ниже параболы. Следовательно, перпендикуляр, проведенный к любой касательной из начала координат, всегда имеет одну общую точку с параболой, а расстояние от начала координат до касательной не меньше расстояния от начала



координат до некоторой точки параболы (см. рисунок). Значит, искомая касательная проходит через точку параболы, наименее удаленную от начала координат. Найдем эту точку.

Квадрат расстояния от начала координат до любой точки данной кривой определяется формулой $d^2 = 4,5 - y + y^2$ и принимает наименьшее значение при $y = 0,5$. Следовательно, точка $M(2;0,5)$ – искомая точка.

Уравнение искомой касательной:

$$y - 0,5 = -4(x-2) \Leftrightarrow y = -4x + 8,5.$$

6. *Найдите производную 100-го порядка функции* $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Решение. Так как $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} + (x-1)^{-1}$, то

$$f'(x) = -(x+1)^{-2} - (x-1)^{-2}, \quad f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} + (-1)(-2)(x-1)^{-3}, \ldots,$$

$$f^{(100)} = (-1)^{100} \cdot 100!(x+1)^{-101} + (-1)^{100} \cdot 100!(x-1)^{-101} = 100!\left(\frac{1}{(x+1)^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}}\right).$$

7. *Найдите количество корней уравнения* $a^x = ax$.

Решение. По определению показательной функции $a > 0,\ a \neq 1$. Очевидно, что $x = 1$ – корень уравнения, причем при $0 < a < 1$ – единственный. Пусть $a > 1$. Разделим обе части уравнения на a и получим уравнение

$$a^{x-1} = x, \qquad (2)$$

равносильное исходному. Так как $x_0 = 1$ – корень уравнения (2), то график функции

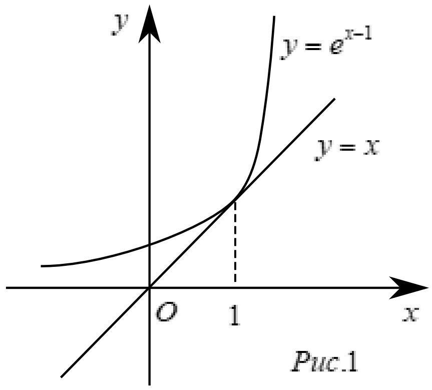


Рис.1

$f(x) = a^{x-1}$ всегда имеет хотя бы одну общую точку с прямой $y = x$, причем единственную, если прямая $y = x$ является касательной к графику функции. Так как угловой коэффициент прямой $y = x$ равен 1 и $f'(x) = a^{x-1}\ln a$, решая уравнение $a^{x-1}\ln a = 1$, найдем $a = e$ – то значение параметра a, при котором прямая $y = x$ является касательной (рис. 1).

При всех остальных значениях a график функции $f(x) = a^{x-1}$ пересекает прямую $y = x$ в двух точках (рис. 2, 3).

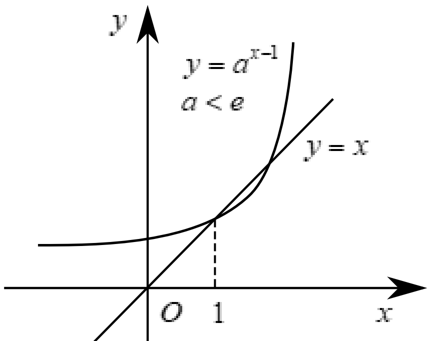


*Рис.*2

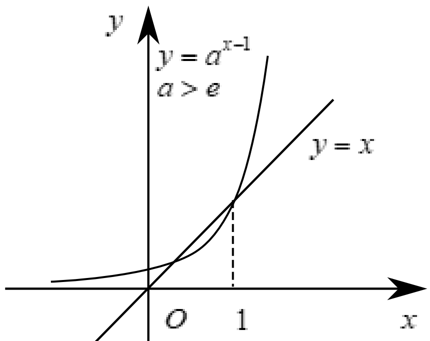


*Рис.*3

Таким образом, уравнение имеет один корень при $a < 1$ и $a = e$, и два корня при $a > 1,\ a \neq e$.