Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2021

1. *Построить график функции* $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

Решение. Запишем функцию в виде $y=(x-1)\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n$.

Пусть $x\in(-1;1)$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, и $y=(x-1)\operatorname{arctg}0=0$.

Также $y=0$ при $x=1$.

Если $x\in(1;+\infty)$, то тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=+\infty$, а так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$, то имеем

$$y=(x-1)\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n=\frac{\pi(x-1)}{2}.$$

Пусть $x\in(-\infty;-1)$. Так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x^n=\pm\frac{\pi}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n$ не существует, то есть функция не определена при $x\in(-\infty;-1)$. Точно так же доказывается, что функция не определена при $x=-1$. Таким образом,

$$y=\begin{cases}0, & x\in(-1;1],\\ \dfrac{\pi(x-1)}{2}, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

Построение графика теперь является тривиальной задачей.

2. *Решить систему уравнений:*
$$\begin{cases}x_2+x_3+\ldots+x_{2020}+x_{2021}=1,\\ x_1+x_3+\ldots+x_{2020}+x_{2021}=2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_{2019}+x_{2021}=2020,\\ x_1+x_2+\ldots+x_{2019}+x_{2020}=2021.\end{cases}$$

Решение. Складывая все уравнения системы, получим

$$2020\cdot(x_1+\ldots+x_{2021})=1+2+\ldots+2021=\frac{2021+1}{2}\cdot2021=1011\cdot2021.$$

Тогда

$$x_1+\ldots+x_{2021}=\frac{1011\cdot2021}{2020}. \qquad (1)$$

Вычитая из равенства (1) поочередно все уравнения системы, находим

$$x_k = \frac{1011\cdot 2021}{2020} - k,\ k = 1, \ldots, 2021.$$

3. *Русло реки имеет форму параболы* $y = 2x^2 + 5x + 1$*, а автомагистраль проходит по прямой* $y = 7x - 3$*. В какой точке на берегу реки следует построить порт, чтобы расстояние от него до автомагистрали было наименьшим?*

Решение. Отметим, что парабола и прямая не пересекаются. Несложно показать, что наименее удаленной от данной прямой является та точка параболы, касательная в которой будет параллельна этой прямой. Исходя из геометрического смысла производной и условия параллельности прямых, составим уравнение

$$\left(2x^2 + 5x + 1\right)' = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 5 = 7.$$

Отсюда найдем $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, искомая точка имеет координаты $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

4. *Пират Джон Сильвер зарыл на Острове Сокровищ клад. На острове растут всего две пальмы: большая и маленькая, причём на расстоянии 400 м друг от друга. Сильвер сообщил своей команде, что расстояние от клада до большой пальмы в три раза меньше расстояния от клада до маленькой пальмы. Найти наименьшую длину траншеи, которую придётся вырыть пиратам, чтобы наверняка отыскать клад.*

Решение. Выберем систему координат так, чтобы большая пальма находилась в начале координат, а маленькая – в точке $(400; 0)$. Пусть $(x; y)$ – координаты клада. Тогда по условию задачи

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 400)^2 + y^2} \ \Leftrightarrow\ (x + 50)^2 + y^2 = 150^2.$$

Таким образом, множество точек, в которых может быть зарыт клад, образует окружность радиуса 150 м. Следовательно, наименьшая длина траншеи, которую надо вырыть, чтобы наверняка обнаружить клад, равна 300π.

5. *Найти количество действительных корней уравнения* $x^3 - \pi x - e = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - \pi x - e$ и найдем её критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 - \pi = 0,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}};\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$, а так как $f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}-e<0$, то на промежутке $\left(-\infty;\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ уравнение корней не имеет. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, уравнение имеет единственный корень, который принадлежит промежутку $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

6. *Функция $f(x)$ дифференцируема и имеет локальный максимум в точке $x=1$. Доказать, что функция $g(x)=f\left(x^3+2x^2\right)$ имеет экстремум в точке $x=-1$ и определить его тип (минимум или максимум).*

Решение. Так как точка $x=1$ является точкой локального максимума функции $f(x)$, то $f'(1)=0,\ f''(1)<0$. Найдем производную функции $g(x)$:

$$g'(x)=\left(3x^2+4x\right)f'\left(x^3+2x^2\right).$$

Тогда $g'(-1)=-f'(1)=0$, следовательно, $x=-1$ – критическая точка функции $g(x)$. Далее найдем вторую производную:

$$g''(x)=(6x+4)\,f'\left(x^3+2x^2\right)+\left(3x^2+4x\right)^2 f''\left(x^3+2x^2\right).$$

Имеем $g''(-1)=(-1)^2\cdot f''(1)<0$, значит $x=-1$ – точка локального максимума функции $g(x)$.