Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2022

1. *Решить уравнение* $\begin{vmatrix} x & 2021 & 2022 \\ 2021 & x & 2022 \\ 2021 & 2022 & x \end{vmatrix} = 0.$

Решение. Обозначим

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 2021 & 2022 \\ 2021 & x & 2022 \\ 2021 & 2022 & x \end{vmatrix}.$$

Несложно заметить, что при $x = 2021$ и $x = 2022$ определитель $\Delta(x)$ содержит две одинаковые строки, следовательно, равен 0. Прибавим к первому столбцу сумму второго и третьего, тогда

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x+2021+2022 & 2021 & 2022 \\ 2021+x+2022 & x & 2022 \\ 2021+2022+x & 2022 & x \end{vmatrix} = (x+4043)\begin{vmatrix} 1 & 2021 & 2022 \\ 1 & x & 2022 \\ 1 & 2022 & x \end{vmatrix},$$

значит $\Delta(-4043) = 0$. Таким образом, уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 2021,\ x_2 = 2022,\ x_3 = -4043.$$

Поскольку $\Delta(x)$ представляет собой многочлен 3-й степени, то других корней он не имеет.

2. *При каком значении* t ***точки*** $A(3-t;6+2t)$, $B(1+t;3-t)$, $C(t-1;1)$ ***лежат на одной прямой, причем точка*** B ***находится между точками*** A ***и*** C***?***

Решение. Указанные условия будут выполнены, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ будут коллинеарными и сонаправленными, т.е. $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ и $\lambda > 0$. Так как $\overrightarrow{AB} = (2t-2;-3-3t)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;t-2)$, получим систему

$$\frac{2t-2}{-2} = \frac{-3-3t}{t-2} = \lambda > 0,$$

решив которую, найдем $t = 3-\sqrt{10}$.

3. *Изобразить множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}} > -1$**.**

Решение. Пусть $y^2 < x^2$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{y^2}{x^2}\right)^n}{1+\left(\dfrac{y^2}{x^2}\right)^n}=1,$$

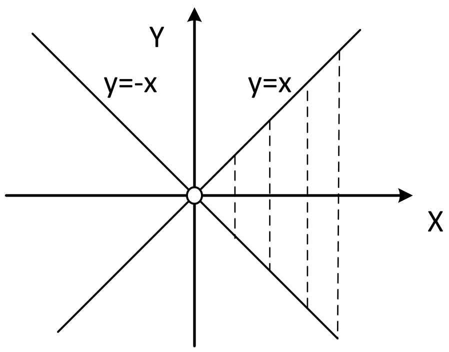
так как $\left(\dfrac{y^2}{x^2}\right)^n \to 0$ при $n\to\infty$. Если $y^2 > x^2$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^n-1}{\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^n+1}=-1,$$

так как $\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^n \to 0$ при $n\to\infty$. Также очевидно, что при $x^2=y^2$ значение предела равно 0. Таким образом, искомое множество точек определяется условиями

$$\begin{cases} y^2 \le x^2, \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \le y \le x, \\ x^2+y^2 \ne 0 \end{cases}$$

и изображено на рисунке.



4. Когда пароходы были ещё несовершенны, считалось, что количество расходуемого в час топлива прямо пропорционально кубу скорости парохода. При скорости 15 км/ч расходовалось 1,5 т угля в час по цене 18 рублей за тонну, а другие расходы составляли 16 рублей в час. Найти в рублях наименьшую стоимость прохождения пути в 2000 км.

Решение. При скорости ν км/ч тратится $k\nu^3$ кг топлива. При $\nu=15$ км/ч тратится $k\cdot 15^3=1500$ кг, откуда $k=\dfrac{4}{9}$. Тогда при скорости ν за 1 час будет израсходовано $\frac{4}{9}\nu^3$ кг топлива, и при цене 18 рублей за 1 тонну стоимость одного часа движения парохода с учётом прочих расходов составит

$$\frac{4}{9}v^3 \cdot 0{,}018 + 16 = 0{,}008v^3 + 16$$

рублей. Тогда 2000 км пути обойдутся хозяевам парохода в сумму

$$F(\nu) = \frac{2000}{\nu} \cdot \left(0{,}008\nu^3 + 16\right)$$

рублей. Функция $F(\nu)$ принимает при $v = 10$ наименьшее значение на множестве $\nu > 0$, равное 4800 (это легко показать, используя производную функции $F(\nu)$). Таким образом, наименьшая стоимость прохождения пути в 2000 км составляет 4800 рублей.

5. ***Составить уравнение общей касательной к графикам функций*** $y = -x^2 - 2x - 3$ ***и*** $y = x^2 + 4x + 6$**.**

Решение. Обозначим $f_1(x) = -x^2 - 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 4x + 6$. Уравнение касательной к графику функции $y = f_1(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y - f_1(a) = f_1'(a)(x - a) \ \Leftrightarrow\ y + a^2 + 2a + 3 = (-2a - 2)(x - a),$$

или

$$y = (-2a - 2)x + a^2 - 3. \qquad (1)$$

Аналогичным образом составим уравнение касательной к графику функции $y = f_2(x)$ в точке $x = b$:

$$y = (2b + 4)x - b^2 + 6. \qquad (2)$$

Так как уравнения (1) и (2) задают одну и ту же прямую, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2a - 2 = 2b + 4, \\ a^2 - 3 = -b^2 + 6. \end{cases}$$

Тогда $a = 0$ или $a = -3$. Подставляя в (1), получим два уравнения общих касательных:

$$y = -2x - 3 \ \text{ и } \ y = 4x + 6.$$

6. ***Найти все значения параметра*** a***, для которых неравенство***

$$\ln(1 + x) \ge x - ax^2$$

выполняется при всех $x \ge 0$**.**

Решение. Обозначим $f(x)=\ln(1+x)-x+ax^2$. Очевидно, что исходное неравенство равносильно неравенству $f(x)\geq 0$. Заметим, что $f(0)=0$. Найдем производную и критические точки функции $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+2ax=\frac{2x\left(x-(1-2a)\right)}{1+x},$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x}-1+2ax=0, \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1-2a. \end{array}\right.$$

Если $1-2a>0$, т.е. $a<\frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ убывает на интервале $(0;1-2a)$, следовательно, $f(x)<0$ при $x\in(0;1-2a)$, и условие задачи не выполнено.

Если же $1-2a\leq 0$, т.е. $a\geq\frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0;+\infty)$, следовательно, $f(x)>0$ при всех $x>0$.

Таким образом, неравенство $f(x)\geq 0$ будет выполнено при любых $x\geq 0$ тогда и только тогда, когда $a\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.