Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2023

1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2022^n+2023^n}$.

Решение. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2022^n+2023^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2023^n\left(\left(\frac{2022}{2023}\right)^n+1\right)}=$$

$$=2023\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2022}{2023}\right)^n+1}=2023,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2022}{2023}\right)^n=0$.

2. Доказать, что матричное уравнение $X^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ***не имеет решений, если элементы матрицы X – действительные числа.***

Решение. Предположим, что существует такая матрица X, что будет верно равенство $X^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Так как $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, то

$$\det X^2=(\det X)^2=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

что невозможно, если элементы матрицы X – действительные числа.

3. На участке леса, ограниченном тремя дорогами, проходящими по прямым $x-2y+5=0$, $x+2y-7=0$ ***и*** $x=5$, ***живёт медведь. В какой точке леса он должен обустроить берлогу, чтобы расстояние от неё до ближайшей дороги было как можно больше?***

Решение. Указанные прямые образуют треугольник с вершинами $A(1;3)$, $B(5;5)$ и $C(5;1)$. Докажем следующее утверждение: в любом треугольнике внутренней точкой, наиболее удаленной от ближайшей стороны треугольника, является центр вписанной в треугольник окружности, и только он.

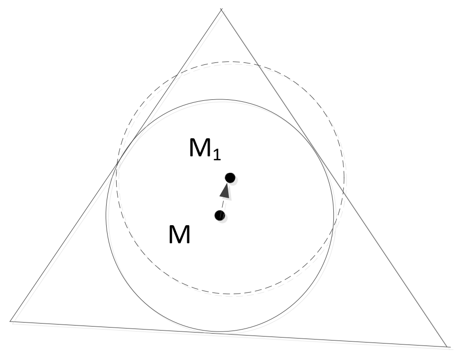

Рис.1

Пусть r – радиус вписанной в треугольник окружности. Тогда центр M этой окружности находится на расстоянии r от каждой стороны треугольника. Если же точку M переместить вместе с окружностью в любую точку M_1, лежащую внутри треугольника (рис.1), то очевидно, что окружность будет пересекать по крайней мере одну сторону треугольника. Следовательно, расстояние от точки M_1 до этой стороны будет меньше r. Утверждение доказано.

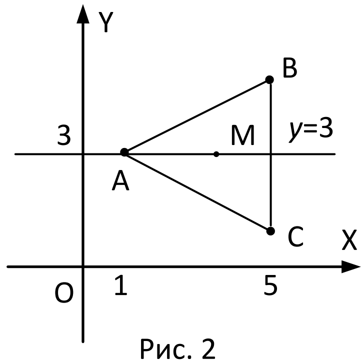

Рис. 2

Таким образом, необходимо найти координаты центра M вписанной в треугольник ABC окружности, который лежит на пересечении его биссектрис. Заметим, что прямая $y=3$ является биссектрисой угла A треугольника (рис.2), следовательно, точка M имеет координаты $(x_0;3)$.

Известно, что расстояние d от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ может быть найдено по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Так как точка M равноудалена от сторон AB (лежит на прямой $x-2y+5=0$) и BC ($x=5$), получим уравнение

$$\frac{|x_0-2\cdot 3+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=|x_0-5|,$$

которое имеет два корня $x_0=6\pm\sqrt{5}$. Точка $\left(6+\sqrt{5};\,3\right)$ находится вне треугольника ABC. Следовательно, медведю следует обустроить берлогу в точке $M\left(6-\sqrt{5};3\right)$.

4. Вычислить определитель n - го порядка, элементы которого определяются формулой $a_{ij}=\min\{i,j\}$, $i,j=1,\dots,n$.

Решение.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Отнимем от каждой строки определителя, начиная со второй, первую строку и разложим полученный определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}.$$

Проделаем то же самое еще $n-3$ раза, получим

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} = \dots = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

5. Михаил приобрел акции, стоимость которых к концу года x становится равной x^2 руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 руб., к концу второго — 4 руб. и т. д.). В конце любого года можно продать акции и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы по истечении 20 лет прибыль была максимальной?

Решение. Пусть акции проданы в конце года x за x^2 руб., и полученная сумма положена в банк на оставшиеся $20-x$ лет под 25% годовых. Тогда цена акций на конец срока составит

$$s(x) = x^2 \cdot 1{,}25^{20-x} \text{ тыс. руб.}$$

Найдём наибольшее значение полученной функции на множестве натуральных x, не превосходящих 20. Имеем:

$$s'(x) = 2x \cdot 1{,}25^{20-x} - x^2 \cdot 1{,}25^{20-x} \ln 1{,}25 = 1{,}25^{20-x} \cdot x\left(2 - x\ln 1{,}25\right).$$

Найденная производная обращается в нуль в точке $x_0 = \dfrac{2}{\ln 1{,}25}$ и меняет в ней знак с плюса на минус. Следовательно, это точка максимума.

Оценим значение x_0. Так как при малых x справедливо равенство $\ln(1+x) \approx x$, то $x_0 \approx 8$, однако погрешность приближения может оказаться существенной. Поэтому сравним значения $s(x)$ в точках, близких к 8:

$$\frac{s(8)}{s(7)} = \frac{64\cdot 1{,}25^{12}}{49\cdot 1{,}25^{13}} = \frac{64}{49}\cdot\frac{4}{5} > 1,\ \ s(8) > s(7),$$

$$\frac{s(9)}{s(8)} = \frac{81\cdot 1{,}25^{11}}{64\cdot 1{,}25^{12}} = \frac{81}{64}\cdot\frac{4}{5} > 1,\ \ s(9) > s(8),$$

$$\frac{s(10)}{s(9)} = \frac{100\cdot 1{,}25^{10}}{81\cdot 1{,}25^{11}} = \frac{100}{81}\cdot\frac{4}{5} < 1,\ \ s(10) < s(9).$$

Следовательно, наибольшее значение функции $s(x)$ на множестве натуральных чисел достигается при $x=9$. Продавать акции следует в конце девятого года.

6. При каких положительных a графики функций $y=x^a$ и $y=\ln x$ имеют одну и только одну общую точку?

Решение. Абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x^a$ и $y=\ln x$ совпадают с корнями уравнения $x^a=\ln x$, а также с нулями функции $f(x)=x^a-\ln x$, определенной и дифференцируемой на $(0;+\infty)$. Так как

$$f'(x)=ax^{a-1}-\frac{1}{x}=\frac{ax^a-1}{x},$$

то функция убывает при $x<a^{-\frac{1}{a}}$ и возрастает при $x>a^{-\frac{1}{a}}$. Найдем значение функции $f(x)$ в точке минимума $x_0=a^{-\frac{1}{a}}$:

$$f(x_0)=a^{-1}-\ln a^{-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ln a=\frac{1+\ln a}{a}.$$

Если $a>e^{-1}$, то $f(x_0)>0$ и $f(x)>0$ при всех $x\in(0;+\infty)$. Нулей у функции нет.

Если $a=e^{-1}$, то $f(x_0)=0$, $f(x)>0$ при всех $x>0,\ x\neq x_0$. Функция имеет единственный ноль в точке x_0.

Если $0<a<e^{-1}$, то $f(x_0)<0$. Так как $f(1)>0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (это следует из того факта, что степенная функция имеет более высокий порядок роста, чем логарифмическая), то функция имеет 2 нуля.

Таким образом, графики функций имеют ровно одну общую точку только при $a=e^{-1}$.