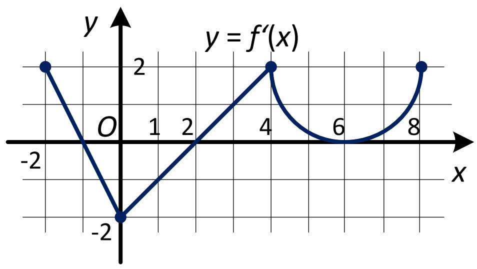
Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2024

1. *Функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[-2;8]$ *и известно, что* $f(2)=1$. *На рисунке изображен график функции* $f'(x)$ *– производной функции* $f(x)$.



а) Найти точки экстремума функции $f(x)$*;*

б) найти интервалы выпуклости-вогнутости графика функции $f(x)$*;*

в) вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6}$.

Решение. а) Критическими точками функции являются нули производной: $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=6$. При переходе аргумента через точки x_1 и x_2 производная меняет знак, следовательно, функция имеет экстремум в этих точках (максимум в точке x_1 и минимум в точке x_2). При переходе аргумента через точку x_3 знак производной не меняется, следовательно, экстремума в этой точке нет.

б) Исходя из вида графика функции $y=f'(x)$ можно сделать вывод, что она дифференцируема на интервалах $(-2;0)$, $(0;4)$, $(4;8)$, т.е. в этих интервалах существует $f''(x)$ – вторая производная функции $f(x)$. Так как $f'(x)$ убывает на промежутках $(-2;0)$ и $(4;6)$, то $f''(x)<0$ на этих промежутках, и график функции $f(x)$ является выпуклым. На промежутках $(0;4)$ и $(6;8)$ $f'(x)$ возрастает, $f''(x)>0$ на этих промежутках, и график функции $f(x)$ является вогнутым.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6f'(x)-3}{2x-5}=\dfrac{-3}{-1}=3.$

Применялось правило Лопиталя, $f'(2)=0$.

Внимание! Грубая ошибка! Неверное решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6}\neq\lim_{x\to 2}\frac{6f(2)-3x}{x^2-5x+6}.$$

Подставлять 2 <u>вместо x</u> можно только <u>во всем</u> выражении, стоящем под знаком предела!

2. *Ксения стоит неподвижно в точке* $K(-2;5)$. *Артем идет по тропинке, проложенной по прямой* $3x+4y-6=0$. *Их пес Джерри движется так, что в любой момент времени находится на середине отрезка, соединяющего Артема и Ксению. Составить уравнение траектории движения Джерри.*

Решение. Уравнение прямой, по которой идет Артем: $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}x$. Пусть Артем находится в точке $\left(x_A, \frac{3}{2}-\frac{3}{4}x_A\right)$, Ксения находится в точке $K(-2;5)$. Тогда координаты Джерри

$$x=\frac{x_A-2}{2}, \quad y=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}x_A+5}{2}. \qquad (1)$$

Выразим из первого из равенств (1)

$$x_A=2x+2$$

и подставим во второе:

$$y=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}(2x+2)+5}{2}.$$

Отсюда получаем уравнение траектории, по которой движется Джерри:

$4y+3x-10=0$ (прямая линия).

3. *При каком значении* a *система уравнений*

$$\begin{cases}(2b-1)x + 2by = a,\\ bx + (b-1)y = 6b\end{cases} \qquad (2)$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении b*?*

Решение. Определитель системы (2)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2b-1 & 2b\\ b & b-1\end{vmatrix}=(2b-1)(b-1)-2b^2=-3b+1.$$

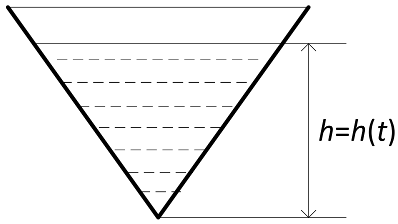
Если $\Delta\neq 0$, то система (2) имеет единственное решение при любом значении a.

Пусть $\Delta=0$, тогда $b=\frac{1}{3}$. Система примет вид

$$\begin{cases}-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = a,\\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 2.\end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) совместна, если $a=-2$, и несовместна при $a\neq-2$. Следовательно, $a=-2$ – единственное значение, при котором система (2) совместна независимо от того, какое значение примет b,

4. *Емкость, имеющая форму перевернутого конуса, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, заполняется водой так, что высота* h *(в дециметрах) уровня воды в емкости определяется формулой* $h = 2\sqrt[3]{t^2}$*, где* t *– время в минутах, отсчитываемое с момента начала поступления воды. Найти функцию* $v(t)$*, определяющую скорость (л/мин), с которой вода поступает в емкость в любой момент времени* t*.*



Решение. Несложно показать, что объем воды в емкости в любой момент времени t выражается формулой

$$V(t) = \frac{8\pi t^2}{9} \ (\text{л}).$$

Исходя из физического смысла производной,

$$v(t) = V'(t) = \frac{16\pi t}{9} \ (\text{л/мин}).$$

5. *Найти все пары чисел* (a, b)*,* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*, для которых верно равенство*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+1}{3x+4}\right)^{bx+1} = 2024. \qquad (4)$$

Решение. Обозначим

$$L(a,b) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+1}{3x+4}\right)^{bx+1}.$$

Пусть $b = 0$, тогда

$$L(a,0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{3x+4} = \frac{a}{3},$$

и равенство (4) будет верно при $a = 6072$.

Если $b \neq 0,\ a \neq 3$, то

$$L(a,b) = \begin{cases} +\infty, \text{ если } a > 3,\ b > 0, \text{ или } a < 3,\ b < 0, \\ 0, \text{ если } a < 3,\ b > 0, \text{ или } a > 3,\ b < 0. \end{cases}$$

Если $b \neq 0,\ a = 3$, то

$$L(3,b) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{bx+1} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1 + \frac{-3}{3x+4}\right)^{\frac{3x-4}{-3}}\right)^{\frac{-3(bx+1)}{3x-4}} = e^{-b}.$$

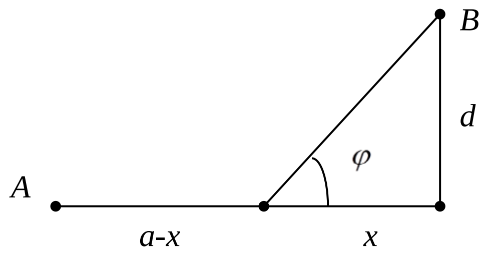
Из равенства $e^{-b} = 2024$ находим $b = -\ln 2024$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две пары чисел (a,b): $(6072;0)$ и $(3;-\ln 2024)$.

6. *Из пункта A, расположенного на берегу реки, надо перевозить грузы в пункт B, расположенный на* a *километров ниже по течению реки и в* d *километрах от берега. Под каким углом следует провести шоссе из пункта B к реке, чтобы доставка грузов из пункта A в пункт B обходилась возможно дешевле, если тариф по реке вдвое меньше, чем по шоссе?*

Решение. Примем условно тариф по реке за единицу, тогда стоимость перевозки будет выражаться функцией

$$Q(x) = a - x + 2\sqrt{x^2 + d^2},$$



$x \in [0;a]$. Исследуя функцию $Q(x)$ на экстремум, найдем, что она имеет минимум в точке $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Если $\frac{d}{\sqrt{3}} \in [0;a]$, т.е. $d \le a\sqrt{3}$, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{x} = \sqrt{3}$, следовательно $\varphi = 60^\circ$. Если же $d > a\sqrt{3}$, то, поскольку функция $Q(x)$ убывает на $[0;a]$, наименьшее значение она принимает при $x = a$, значит дорогу следует проложить напрямую из A в B под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{d}{a}$.