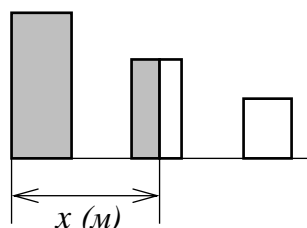


Решения задач студенческой олимпиады по математике БГЭУ 2026

1. Три прямоугольника, высоты которых соответственно равны 3 м, 2 м и 1 м, а основания одинаковы и равны 1 м, отстоят друг от друга на расстояние 1 м. Запишите функцию, выражающую площадь закрашенной фигуры (см. рис.) при любом значении переменной $x \in [0; +\infty)$.

Решение.
$$S(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, \\ 3, & 1 \leq x < 2, \\ 2x - 1, & 2 \leq x < 3, \\ 5, & 3 \leq x < 4, \\ x + 1, & 4 \leq x < 5, \\ 6, & x \geq 6. \end{cases}$$



2. Среди прямых, проходящих через точку $P(3;0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $2x - y - 2 = 0$ (l_1) и $x + y + 3 = 0$ (l_2), делится точкой P пополам.

Решение. Уравнение любой прямой l , проходящей через точку P (кроме прямой $x = 3$, не удовлетворяющей условию задачи), можно записать в виде $y = k(x - 3)$. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 3kx - 3k, \\ x + y + 3 = 0 \end{cases},$$

найдем точки $M\left(\frac{3k-2}{k-2}; \frac{4k}{k-2}\right)$ и $N\left(\frac{3k-3}{k+1}; \frac{-6k}{k+1}\right)$ пересечения прямой l с прямыми l_1 и l_2 соответственно. Так как точка P должна делить отрезок MN пополам, то

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3k-2}{k-2} + \frac{3k-3}{k+1}\right) = 3, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4k}{k-2} - \frac{6k}{k+1}\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $k = 8$, и уравнение искомой прямой $y = 8x - 24$.

3. Найдите все значения λ , при которых матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Обозначим $A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Если $\det A \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$X = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, значения λ , при которых уравнение (1) имеет бесконечно много решений, надо искать среди корней уравнения

$$\det A = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которыми являются числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

Пусть $\lambda = -1$, тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1, \\ 4b + 2d = -2, \\ 6a + 3c = -2, \\ 6b + 3d = 4, \end{cases}$$

которая несовместна.

При $\lambda = 6$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3a + 2c = 1, \\ -3b + 2d = -2, \\ 6a - 4c = -2, \\ 6b - 4d = 4, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений: $\left(\frac{2}{3}c - \frac{1}{3}, \frac{2}{3}d + \frac{2}{3}, c, d \right)$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$.

Следовательно, искомое значение $\lambda = 6$.

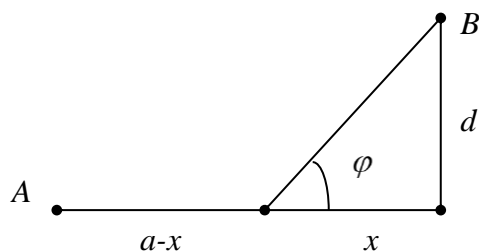
4. Решите уравнение $\lim_{n \rightarrow \infty} ((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})) = 2026$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} ((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^4)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{4n}}{1-x} = \begin{cases} \infty, & \text{если } |x| > 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{если } |x| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Получаем $\frac{1}{1-x} = 2026$ и $x = \frac{2025}{2026}$.

5. Из речного порта A надо направлять грузы в пункт B , расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега. Под каким углом следует провести шоссе из пункта B к реке, чтобы доставка грузов из города A в пункт B обходилась возможно дешевле, если тариф по реке вдвое меньше, чем по шоссе?



Решение.

Примем условно тариф по реке за единицу, тогда стоимость перевозки будет выражаться функцией $Q(x) = a - x + 2\sqrt{x^2 + d^2}$, $x \in [0; a]$. Исследуя функцию $Q(x)$ на экстремум, найдем, что она имеет минимум в точке $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Если $\frac{d}{\sqrt{3}} \in [0; a]$, т.е. $d \leq a\sqrt{3}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{x} = \sqrt{3}$, следовательно $\varphi = 60^\circ$. Если же $d > a\sqrt{3}$, то, поскольку функция $Q(x)$ убывает на $[0; a]$, наименьшее значение она принимает при $x = a$, значит дорогу следует проложить напрямую из A в B под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{d}{a}$.

6. Найдите производную 100-го порядка функции $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Решение. Так как $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = (x+1)^{-1} + (x-1)^{-1}$, то

$$f'(x) = -(x+1)^{-2} - (x-1)^{-2}, \quad f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} + (-1)(-2)(x-1)^{-3}, \dots,$$

$$f^{(100)} = (-1)^{100} \cdot 100!(x+1)^{-101} + (-1)^{100} \cdot 100!(x-1)^{-101} = 100! \left(\frac{1}{(x+1)^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}} \right).$$