

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

**Сборник задач и упражнений
по высшей математике
для студентов экономических специальностей
В 2 частях
Часть II**

МИНСК 2014

УДК 51 (075.3)

ББК 22.1я 73

С 23 Печатается в авторской редакции

Авторы: Л.Н.Гайшун, Н.В.Денисенко, А.В.Марков, Л.В.Станишевская,
Н.Н.Ящина

Рецензенты: зав. отделом ИМ НАН Беларуси, доктор физико-математических
наук, профессор Н.А.Лиходед

Рекомендовано кафедрой высшей математики

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Л.Н.Гайшун, Н.В.Денисенко, А.В.Марков (и др.). – Минск: БГЭУ, 2014. – Ч.2. – 270 с.

Содержит задачи по следующим разделам математики: функции нескольких переменных, интегральное исчисление и дифференциальные уравнения, ряды. Каждый параграф сборника содержит краткие сведения из теории, решенные примеры для иллюстрации наиболее рациональных методов решения и задачи для самостоятельного решения. В конце каждой главы даны контрольные задания. В приложении содержатся варианты тестовых заданий для контроля усвоения студентами учебного материала. Для усиления прикладной экономической направленности курса высшей математики в сборнике приведено большое количество задач экономического содержания.

Содержание

Предисловие	5
Раздел IV. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	6
Глава 8. Функции нескольких переменных	6
8.1. Основные понятия	6
8.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных	9
8.3. Частные производные, полный дифференциал, производная в данном направлении и градиент функции	12
8.4. Дифференцирование сложных и неявных функций. Частные производные и дифференциалы высших порядков	18
8.5. Экстремум функций нескольких переменных. Условный экстремум	22
8.6. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных. Функция нескольких переменных в экономических задачах	25
8.7. Контрольные задания к главе 8	28
Раздел V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	37
Глава 9. Неопределенный интеграл	31
9.1. Непосредственное интегрирование	33
9.2. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала и методом подстановки	39
9.3. Интегрирование по частям.....	48
9.4. Интегрирование рациональных функций	57
9.5. Интегрирование тригонометрических функций	69
9.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций	81
9.7. Контрольные задания к главе 9	93
Глава 10. Определенный интеграл и его приложения.....	95
10.1. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница	95
10.2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	103
10.3. Приближенное вычисление определенных интегралов (формула трапеции). Несобственные интегралы	110
10.4. Геометрические приложения определенного интеграла	122
10.5. Приложения определенного интеграла в решении физических и экономических задач	140
10.6. Контрольные задания к главе 10	145

Глава 11. Дифференциальные уравнения	149
11.1. Основные понятия и определения	149
11.2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными	154
11.3. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка	157
11.4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка	161
11.5. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами	166
11.6. Контрольные задания к главе 11	175
Раздел VI. РЯДЫ	177
Глава 12. Числовые ряды	177
12.1. Числовой ряд, его сходимость	177
12.2. Исследование на сходимость рядов с положительными членами. Признаки сравнения	183
12.3. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости	185
12.4. Абсолютная сходимость. Признак Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов	190
12.5. Контрольные задания к главе 12	193
Глава 13. Степенные ряды	195
13.1. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости	195
13.2. Ряды Тейлора и Маклорена	199
13.3. Применение рядов в приближенных вычислениях	203
13.4. Контрольные задания к главе 13	207
Примерные варианты тестовых заданий	209
О т в е т ы	227
Л и т е р а т у р а	269

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первые два года обучения студенты экономических специальностей изучают курс высшей математики, являющийся фундаментом экономического образования. Для успешного и глубокого усвоения данного курса необходимы не только учебники и справочники по соответствующим разделам, но и задачники, служащие для закрепления теоретического материала и повышения уровня математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.

При подготовке сборника авторы исходили из того, что наиболее эффективной формой изучения высшей математики является, помимо изучения теоретического материала, самостоятельная работа студентов над практическими заданиями при надлежащем контроле со стороны преподавателей. Поэтому каждый параграф содержит краткие сведения из теории, носящие справочный характер, и достаточно большое число примеров с подробным решением для иллюстрации наиболее рациональных приемов. В конце каждой главы даны соответствующие контрольные задания, что облегчает использование этого сборника преподавателями.

Материал сборника подготовили сотрудники кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета:

глава 8 — кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Марков;

главы 9, 10 — кандидат физико-математических наук Л.В. Станишевская;

глава 11 — ассистент Н.Н. Ящина;

главы 12, 13 — кандидат физико-математических наук, доцент Л.Н. Гайшун.

Кандидат физико-математических наук, доцент Н.В.Денисенко участвовал в написании и редактировании всего сборника.

В конце книги даны ответы на предложенные задачи и приведен список литературы, в который вошли в основном все источники, использованные авторами при составлении данного сборника.

В приложении также даны примерные варианты тестовых заданий для контроля усвоения курса студентами.

Задачник может быть использован студентами экономических специальностей различных вузов всех форм обучения.

Авторы будут благодарны за все замечания и предложения по улучшению данного сборника.

Раздел IV

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Основные понятия

Рассмотрим множество D , состоящее из пар действительных чисел (x, y) , и некоторое множество Z действительных чисел.

Если каждой паре действительных чисел $(x, y) \in D$ по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно определенное действительное число $z \in Z$, то говорят, что на множестве D задана функция $z = f(x, y)$, принимающая значения из множества Z .

Функцию $z = f(x, y)$ называют *функцией двух переменных*, а переменные x и y – *независимыми переменными или аргументами*.

Множество D называется областью определения функции. Областью определения функции двух переменных является множество точек плоскости.

Функцию двух переменных можно задавать аналитически, графически и табличным способом.

Частное значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$, $y = y_0$ обозначается через $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Геометрическим изображением (графиком) функции двух переменных $z = f(x, y)$ является, вообще говоря, поверхность в пространстве $Oxyz$.

Аналогично определяется функция большего числа переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Геометрические изображения функции трех и большего числа переменных не имеют простого геометрического смысла.

В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции, рассматривая ее линии уровня (или поверхности уровня), т.е. линии или поверхности, где данная функция сохраняет постоянное значение.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy , для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Таким образом, уравнение линии уровня есть $f(x, y) = C$, где C – некоторая постоянная.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Пример 8.1. Прибыль банка z есть функция процентной ставки x , по которой банк выдает кредит, и процентной ставки y , по которой банк принимает вклады.

Пример 8.2. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = xy$, где x и y — длины сторон прямоугольника, т.е. S — функция двух переменных. Область определения данной функции — это множество точек (x, y) таких, что $x > 0$, $y > 0$, т.е. множество всех точек плоскости, расположенных в первой четверти, не включая оси координат (рис. 8.1).

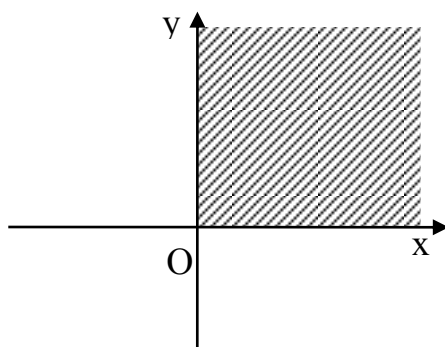


Рис. 8.1

Пример 8.3. Найти область определения функций:

$$1) z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}; \quad 2) z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Решение. 1) Функция имеет действительные значения, если $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Область определения функции есть внутренность этого круга (рис. 8.2).

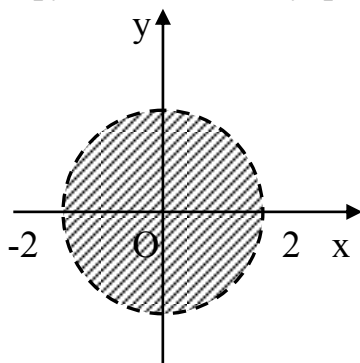


Рис. 8.2

2) Первое слагаемое функции определено при $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ или $-2 \leq x \leq 2$.

Второе слагаемое имеет действительные значения, если $xy \geq 0$, т.е. в двух слу-

чаях: при $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$. Область определения всей функции изображена на рис. 8.3 и включает границы области.

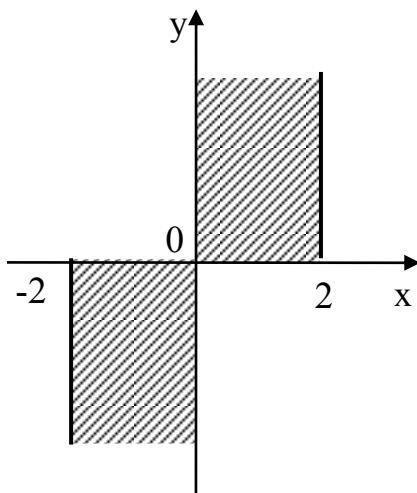


Рис. 8.3

Пример 8.4. Найти линии уровня следующих функций:

1) $z = 2x + y$; 2) $z = \frac{1}{6x^2 + y^2}$.

Решение. 1) Уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $2x + y = C$ или $y = -2x + C$. Линии уровня являются прямыми.

2) Уравнение линий уровня данной функции можно записать в виде $\frac{1}{6x^2 + y^2} = C$ или $C(6x^2 + y^2) = 1$ ($C > 0$), или $\frac{x^2}{\frac{1}{6C}} + \frac{y^2}{\frac{1}{C}} = 1$ ($C > 0$). Линии уровня являются эллипсами.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Вычислить частные значения функций:

а) $z = \frac{3x - 2y}{2x - y}$ при $x = 2, y = 1$; при $x = 1, y = 3$;

б) $z = x^3 \sin y$ в точке $M\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$; в) $z = \sqrt{x^2 y^2 + y + 3}$ в точке $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

8.2. Найти области определения следующих функций и сделать чертежи:

а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

б) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

в) $z = \ln(x + y)$;

г) $z = x + \arccos y$;

$$\begin{array}{ll}
\text{д) } z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-y^2}; & \text{е) } z = \arcsin \frac{x}{y}; \\
\text{ж) } z = \sqrt{x^2-16} + \sqrt{16-y^2}; & \text{з) } z = \sqrt{y \cos x}; \\
\text{и) } z = \ln(x+y^2); & \text{к) } z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1-x^2 y^2}; \\
\text{л) } z = \frac{1}{x^2-y^2}; & \text{м) } z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}; \\
\text{н) } z = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{y}-x}}; & \text{о) } z = \frac{2}{x-5} + \frac{1}{y}.
\end{array}$$

8.3. Найти области определения следующих функций трех переменных:

$$\begin{array}{ll}
\text{а) } u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}; & \text{б) } u = \lg xyz; \\
\text{в) } u = \arccos x + \arccos y + \arccos z; & \text{г) } u = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.
\end{array}$$

8.4. Найти линии уровня следующих функций:

$$\begin{array}{lll}
\text{а) } z = \ln(x^2+y^2); & \text{б) } z = \arcsin(xy); & \text{в) } z = x^2 + 4y^2; \\
\text{г) } z = xy; & \text{д) } z = \frac{x^2}{y}; & \text{е) } z = 9x^2 - 4y^2.
\end{array}$$

8.5. Найти поверхности уровня функций:

$$\begin{array}{ll}
\text{а) } u = x - y + z; & \text{б) } u = x + y + z; \\
\text{в) } u = x^2 + y^2 + z^2; & \text{г) } u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{array}$$

8.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть в некоторой области D задана последовательность точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ также принадлежит области D . Расстояние между точками (x_n, y_n) и (x_0, y_0) может быть вычислено по формуле

$$d_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}.$$

Будем говорить, что последовательность точек $((x_n, y_n))$ стремится к точке (x_0, y_0) , если при $n \rightarrow \infty$ расстояние $d_n \rightarrow 0$.

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , кроме может быть самой точки.

Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , если для любой последовательности точек $((x_n, y_n))$, стремящейся к точке с координатами

натами (x_0, y_0) , точки которой отличны от точки (x_0, y_0) и не выходят из области определения функции, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n), \dots$ стремится к числу A . В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке с координатами (x_0, y_0) , если предел функции $f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ равен значению функции в точке (x_0, y_0) , т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Для функции большего числа переменных предел и непрерывность определяются аналогично.

Пример 8.5. Найти пределы функций:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} \frac{2xy}{x^4 + y^4 + 2}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 3xy}{y}; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x}.$$

Р е ш е н и е. 1) Функция $z = \frac{2xy}{x^4 + y^4 + 2}$ определена и непрерывна на всей плоскости, поэтому предел этой функции равен значению функции в точке $(2; 3)$, т.е. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} \frac{2xy}{x^4 + y^4 + 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{16 + 81 + 2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

2) Функция $z = \frac{\sin 3xy}{y}$ в точке $(1; 0)$ не определена. Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 3xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x \sin 3xy}{3xy} = 3 \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 3xy}{3xy} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3.$$

3) Рассмотрим две последовательности точек, стремящихся к точке $(0; 0)$, а именно: $M_n\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$ и $M'_n\left(\frac{1}{n}; 0\right)$, тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 0}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Для разных последовательностей точек получены разные пределы, это и показывает, что данная функция предела не имеет.

Пример 8.6. Найти точки разрыва функции $z = \frac{xy - 2}{x^2 - y}$.

Решение. Для данной функции знаменатель не должен обращаться в ноль. Если $x^2 - y = 0$, то $y = x^2$ – уравнение параболы. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$.

Задачи для самостоятельного решения

8.6. Найти пределы функций:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{y}$;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$;

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}}$;

г) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x + 1}{y - 1}$;

д) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^3 + y^3)^{1/(x^3 + y^3)}$;

е) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y) \sin \frac{1}{x + y}$;

ж) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

з) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x^2 + y^2}$;

и) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$;

к) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$.

8.7. Найти точки разрыва функций:

а) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

б) $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$;

в) $z = \frac{1}{(x - y)^2}$;

г) $z = \cos \frac{1}{xy}$;

д) $z = \frac{1}{(x - 2)^2 + (y + 3)^2}$;

е) $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$;

ж) $u = \frac{1}{x + y - z}$;

з) $u = \cos \frac{1}{xyz}$.

8.3. Частные производные, полный дифференциал, производная в данном направлении и градиент функции

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

которая называется *частной производной* функции z по переменной x . Аналогично определяется частная производная функции z по переменной y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz , линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy . Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ обозначается символом dz .

Разность между полным приращением и полным дифференциалом функции есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ находится по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ находится по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

При достаточно малых Δx и Δy , а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y,$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (8.1)$$

Формула (8.1) применяется для приближенного вычисления значения функции $z = f(x, y)$ в точке $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ по известным значениям функции $z(x, y)$ и ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данной точке (x, y) .

Производной функции $z = f(x, y)$ в данном направлении $l = \overline{MM_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{M_1 M \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{M_1 M},$$

где $f(M)$ и $f(M_1)$ – значения функции в точках M и M_1 . Если функция z дифференцируема, то справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \quad (8.2)$$

где α – угол, образованный вектором l с осью Ox , а β – угол, образованный вектором l с осью Oy , причем $\alpha + \beta = 90^\circ$ (рис. 8.4).

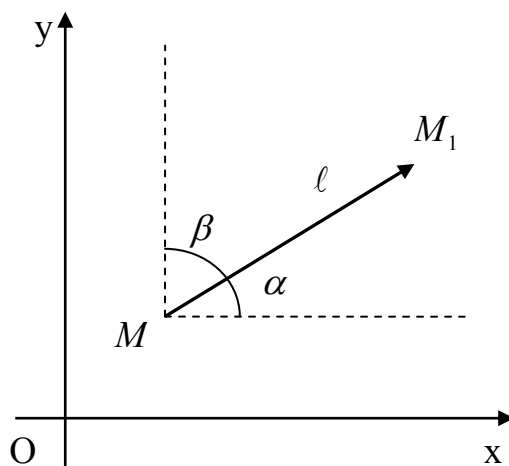


Рис. 8.4

Аналогично определяется производная в данном направлении l для функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (8.3)$$

где α, β, γ – углы между направлением l и соответствующими координатными осями. Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j. \quad (8.4)$$

Производная данной функции в направлении l связана с градиентом функции следующей формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = n p_l \text{grad } z,$$

т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е.

при $l = \text{grad } z$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Градиент функции трех переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Пример 8.7. Найти частные производные следующих функций:

$$1) z = \ln \operatorname{ctg} \frac{y}{x}; \quad 2) u = x^3 y^2 z + 4x - 5y + 2z + 2.$$

Решение. 1) Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{y}{x}} \right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{2y}{x^2 \sin \frac{2y}{x}}. \text{ Аналогично, рассматривая } x \text{ как по-}$$

$$\text{стоянную, получим: } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{y}{x}} \right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}}.$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^2 z + 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 yz - 5, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3 y^2 + 2.$$

Пример 8.8. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}. \text{ Тогда } dz = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dy = \frac{3x^2 dx + 3y^2 dy}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

Пример 8.9. Вычислить приближенно $1.02^{3.01}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции $z = x^y$ при $x = 1 + 0.02$, $y = 3 + 0.01$. Значение функции в точке $(1; 3)$ равно $z(1; 3) = 1^3 = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.01$. Используя формулу (8.1), получим $\Delta z \approx dz = yx^{y-1} \Delta x + x^y \ln x \Delta y = 3 \cdot 1 \cdot 0.02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0.01 = 0.06$. Следовательно, $1.02^{3.01} \approx 1 + 0.06 = 1.06$.

Пример 8.10. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке $M(1; 0)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° .

Решение. Найдем частные производные данной функции и их значения в точке M : $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_M = 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_M = 0$. Здесь $\cos \alpha =$

$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Применяя формулу (8.2), получим}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

Пример 8.11. Найти и построить градиент функции $z = x^2 y$ в точке $M(1; 1)$.

Р е ш е н и е. Вычислим частные производные и их значения в точке M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_M = 2; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_M = 1. \text{ Следовательно, } \text{grad } z = 2i + j$$

(рис. 8.5).

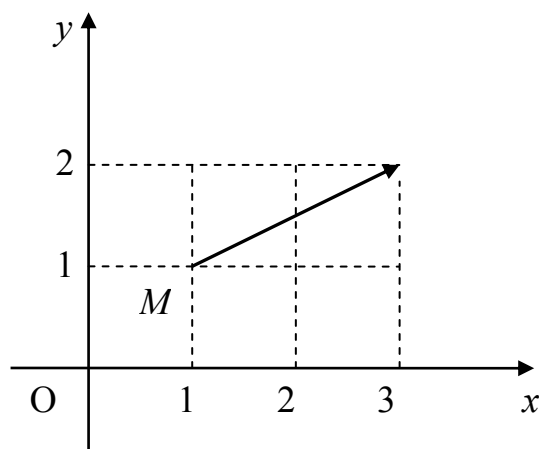


Рис. 8.5

Задачи для самостоятельного решения

8.8. Найти частные производные функций:

а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

б) $z = x^2 \sin(2x + 4y)$;

в) $z = \frac{x-y}{x+3y}$;

г) $z = x^y$;

д) $z = \frac{y^4}{x}$;

е) $z = e^{\sin \frac{x}{y}}$;

ж) $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}, x > 0, y > 0$;

з) $z = \ln \sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}$;

и) $z = \frac{y}{x}$;

к) $z = \frac{5x}{\sqrt{x+y^2}}$;

л) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

м) $z = \frac{\cos x^2}{y}$;

н) $u = (xy)^z$;

о) $u = z^{xy}$.

8.9. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = x^3 + y^4 - 5x^2y$;

б) $z = x^2y^3$;

в) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

г) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$;

д) $z = yx^y$;

е) $z = \ln(x^3 + y^3)$;

$$\text{ж)} \quad z = \ln \left(1 + \frac{x}{y} \right);$$

$$\text{з)} \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\text{и)} \quad z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

$$\text{к)} \quad u = xyz;$$

$$\text{л)} \quad u = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3};$$

$$\text{м)} \quad u = z \cdot e^{xy}.$$

8.10. Найти приближенные значения:

$$\text{а)} \quad (1,02)^2 \cdot (0,99)^3;$$

$$\text{б)} \quad \sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ;$$

$$\text{в)} \quad \sqrt{(4,04)^2 + (2,97)^2};$$

$$\text{г)} \quad 1,03 \cdot 8,99;$$

$$\text{д)} \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{1,98}{0,97} - 1 \right);$$

$$\text{е)} \quad 1,95^2 \cdot e^{0,15}.$$

8.11. Найти производную функции $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке $M(1; 2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° .

8.12. Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $P(1; 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4; 6)$.

8.13. Найти производную функции $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $K(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

8.14. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $N(1; 2; -1)$ в направлении, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

8.15. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $K(2; 1; 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $L(5; 5; 15)$.

8.16. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(2; 1)$, если $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

8.17. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(5; 3)$, если $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

8.18. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке $(1; 2; 3)$, если $u = xyz$.

8.19. Найти угол между градиентами функции $z = \ln \frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и

$B(1; 1)$.

8.4. Дифференцирование сложных и неявных функций. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то z называется сложной функцией от t . При этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad (8.5)$$

если f , φ и ψ – дифференцируемые функции.

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x , то «полная» производная функции z по x находится по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (8.6)$$

Если $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u и v – независимые переменные), и если f , φ и ψ – дифференцируемые функции, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (8.7)$$

Уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее решение (x_0, y_0) , определяет в окрестности x_0 переменную y как непрерывную функцию x при условии, что производная $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Эта функция называется *неявной*. Если в окрестности точки (x_0, y_0) существует также и непрерывная производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, то *неявная функция* имеет производную $\frac{dy}{dx}$, определяемую формулой

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (8.8)$$

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ при аналогичных условиях определяет z как неявную функцию x и y , имеющую частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (8.9)$$

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, имеющая частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Частные производные от этих производных называются частными производными 2-го порядка и обозначаются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные 3-го порядка и других высших порядков.

Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны, если они непрерывны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \text{ и т.д.}$$

Таблица производных высших порядков выглядит следующим образом:

2-го порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

3-го порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \text{ и т.д.}$

Полный дифференциал второго порядка определяется так:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \text{ По-иному данное равенство можно записать символически: } d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot z. \text{ Аналогично}$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z \text{ и т.д.}$$

Пример 8.12. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, где $x = \cos t$, $y = t^2$.

Решение. По формуле (8.5) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t = e^{3x+2y} (4t - 3 \sin t) = e^{3 \cos t + 2t^2} (4t - 3 \sin t).$$

Пример 8.13. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную

$$\frac{dz}{dx}, \text{ если } z = e^{xy}, \text{ где } y = \varphi(x).$$

Р е ш е н и е. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$. На основании формулы (8.6) получаем

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

Пример 8.14. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = f(x, y)$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Р е ш е н и е. Применяя формулы (8.7), получим: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{1}{v}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot u - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{u}{v^2}.$$

Пример 8.15. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x, y)$, найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x((x^2 + y^2)^2 - 1)$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y((x^2 + y^2)^2 - 1)$. Отсюда, применяя формулу (8.8),

получим
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6x((x^2 + y^2)^2 - 1)}{6y((x^2 + y^2)^2 - 1)} = -\frac{x}{y}.$$

Пример 8.16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 - 3y^4 - 2z^2 + yz - y = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -12y^3 + z - 1$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -4z + y$.

Применив формулы (8.9), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2}{-4z + y} = \frac{3x^2}{4z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-12y^3 + z - 1}{-4z + y} = \frac{12y^3 - z + 1}{y - 4z}.$$

Пример 8.17. Найти частные производные второго порядка от функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Теперь дифференцируем

вторично: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Смешанную частную производную можно найти и иначе:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пример 8.18. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y. \text{ Тогда } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy.$$

Найдем теперь частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$. Дифференциал второго порядка запишется следующим образом:

$$d^2 z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

8.20. Найти $\frac{dz}{dt}$, если:

а) $z = x^2 + xy + y^2, \quad x = t^2, \quad y = t;$ б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t;$

в) $z = \frac{y}{x}, \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{2t};$ г) $z = \ln \left(\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right), \quad x = 3t^2, \quad y = \sqrt{t^2 + 1}.$

8.21. Найти $\frac{dz}{dx}$, если:

а) $z = \operatorname{arctg}(xy)$, где $y = e^x;$ б) $z = \frac{x^2 + y}{x^2 - y}$, где $y = 2x + 1$

в) $z = xe^y$, где $y = \varphi(x);$ г) $z = \frac{y}{x^2}$, где $y = \ln x.$

8.22. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если:

а) $z = \frac{x^2}{y}$, где $x = u - 3v$, $y = 2v + u$; б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, где $x = u \sin v$, $y = u \cos v$;

в) $z = x^y$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$; г) $z = x^2 y - y^2 x$, где $x = u + v^2$, $y = u^2 + v$.

8.23. Найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

а) $x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 0$; б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $xe^{3y} - ye^{3x} = 0$; г) $x^3 + y^3 - 4axy = 0$.

8.24. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если:

а) $x^3 + y^3 + z^3 - 2zx = a^2$; б) $3 \cos(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$;

в) $x^2 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 3y + 2 = 0$; г) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.

8.25. Найти все частные производные 2-го порядка, если:

а) $z = \ln(x^2 + y)$; б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; в) $z = \sqrt{2xy + y^2}$;

г) $z = \frac{y+1}{x-1}$; д) $z = x \sin(x+y)$; е) $z = y^2 \ln(x+1)$.

8.26. Найти $d^2 z$, если:

а) $z = \frac{y^3}{x^3}$; б) $z = y \ln \frac{x}{y}$; в) $z = e^{x^2+y^3}$; г) $z = 2 \sin x + \operatorname{tg} y$.

8.5. Экстремум функции нескольких переменных.

Условный экстремум

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой *максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0 , что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности, отличных от точки M_0 , выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$). Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* этой функции.

Необходимые условия экстремума. Если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, то либо все ее частные производные первого порядка в этой точке (если они существуют) равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (8.10)$$

либо хотя бы одна из них не существует.

Точки, в которых все частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются *критическими*.

Аналогично определяются необходимые условия экстремума функции большего числа переменных.

Достаточные условия экстремума. Пусть $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

в критической точке $M_0(x_0, y_0)$ и $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда, если:

1) $\Delta > 0$, $A < 0$, то функция имеет в точке M_0 максимум;

2) $\Delta > 0$, $A > 0$, то функция имеет в точке M_0 минимум;

3) $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

4) $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительные исследования).

Условный экстремум. Чтобы найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, составляется вспомогательная функция Лагранжа

$$u = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y). \quad (8.11)$$

Координаты точки экстремума (x, y) должны удовлетворять системе трех уравнений

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8.12)$$

из которой и находятся λ , x и y .

Пример 8.19. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение. Найдем частные производные и составим систему уравнений (8.10): $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$. Ре-

шая систему, получим четыре критические точки: $M_1(1; 2)$, $M_2(2; 1)$, $M_3(-1; -2)$, $M_4(-2; -1)$. Найдем производные 2-го порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ и составим определитель $\Delta = AC - B^2$ для каждой критической точки.

$$1) \text{ Для точки } M_1(1; 2): A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_1} = 6, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_1} = 12, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_1} =$$

$= 6, \Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Значит, в точке M_1 экстремума нет.

2) Для точки $M_2(2; 1): A = 12, B = 6, C = 12, \Delta = 144 - 36 > 0, A > 0$. В точке M_2 функция имеет минимум. Этот минимум равен значению функции при $x = 2, y = 1: z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Для точки $M_3: A = -6, B = -12, C = -6, \Delta = 36 - 144 < 0$. Значит, в точке M_3 экстремума нет.

4) Для точки $M_4(-2; -1): A = -12, B = -6, C = -12, \Delta = 144 - 36 > 0, A < 0$. В точке M_4 функция имеет максимум, равный $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

Пример 8.20. Найти экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Составим функцию Лагранжа (8.11): $u = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = -4 + 2\lambda x, \frac{\partial u}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$ и составим систему

$$\text{уравнений (8.12)} \begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ из которой следуют решения: } \lambda_1 = \frac{5}{2}, x_1 = \frac{4}{5},$$

$$y_1 = \frac{3}{5} \text{ и } \lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2u = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. Если

$\lambda = \frac{5}{2}, x = \frac{4}{5}$ и $y = \frac{3}{5}$, то $d^2u > 0$ и в этой точке функция имеет условный мини-

мум. Если $\lambda = -\frac{5}{2}, x = -\frac{4}{5}$ и $y = -\frac{3}{5}$, то $d^2u < 0$ и в этой точке функция имеет

условный максимум. Таким образом, $z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11, z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

8.27. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;

б) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;

в) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 4$;

г) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;

д) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$;

е) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

ж) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$;

з) $z = 2xy - 4x - 2y$.

8.28. Найти условные экстремумы следующих функций:

а) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

б) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

в) $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2$;

г) $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

8.6. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных. Функции нескольких переменных в экономических задачах

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в критической точке, или в точке границы области.

Пример 8.21. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$.

Решение. Указанная область – это треугольник (рис. 8.6).

1) Найдем критические точки. Для этого решим систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0.$$

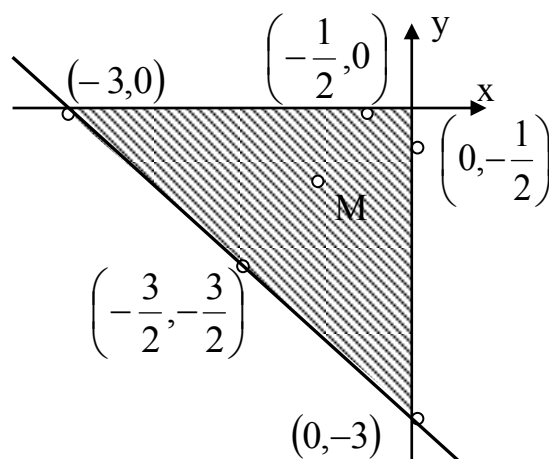


Рис. 8.6

В результате получаем точку $M(-1; -1)$. В точке M значение функции $z_M = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области.

Если $x = 0$, то $z = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \leq y \leq 0$.

Проводя исследование, находим: $(z_{\text{наиб}})_{x=0} = 6$ в точке $(0; -3)$; $(z_{\text{наим}})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ в точке $(0; -\frac{1}{2})$.

Если $y = 0$, то $z = x^2 + x$. По аналогии находим: $(z_{\text{наиб}})_{y=0} = 6$ в точке $(-3; 0)$; $(z_{\text{наим}})_{y=0} = -\frac{1}{4}$ в точке $(-\frac{1}{2}; 0)$.

Если $x + y = -3$, т.е. $y = -3 - x$, функция имеет вид $z = 3x^2 + 9x + 6$. По аналогии находим: $(z_{\text{наим}})_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ в точке $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; $(z_{\text{наиб}})_{x+y=-3} = 6$ совпадает с $(z_{\text{наиб}})_{x=0}$ и $(z_{\text{наиб}})_{y=0}$.

Сопоставляя все полученные значения функции z , делаем вывод, что $z_{\text{наиб}} = 6$ в точках $(0; -3)$ и $(-3; 0)$, $z_{\text{наим}} = -1$ в критической точке M .

Пример 8.22. Производятся два вида товаров, цены которых соответственно равны 40 и 20. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид $C(x, y) = 0,2x^2 + 0,1xy + 0,3y^2$, где x, y – количества товаров первого и второго видов. Требуется составить функцию прибыли, найти ее экстремумы и проверить известное правило экономики: предельная цена товара равна предельным издержкам на производство этого товара.

Решение. Составим функцию прибыли $z = p_1x + p_2y - C(x, y) = p_1x + p_2y - (ax^2 + bxy + cy^2) = 40x + 20y - 0,2x^2 - 0,1xy - 0,3y^2$. С экономической точки зрения переменные x и y должны быть неотрицательными.

Для нахождения критических точек сначала выпишем необходимое условие, т.е. найдем первые частные производные функции z и приравняем их к нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = 40 - 0,4x - 0,1y = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 20 - 0,1x - 0,6y = 0$. Решая систему уравне-

ний $\begin{cases} 40 - 0,4x - 0,1y = 0 \\ 20 - 0,1x - 0,6y = 0 \end{cases}$, получаем $x = \frac{2200}{23}$, $y = \frac{400}{23}$. Таким образом, имеем

критическую точку $M(\frac{2200}{23}; \frac{400}{23})$. (Если бы оказалось, что хотя бы одна из

переменных приняла отрицательное значение, то задача с экономической точки зрения не имела бы решения.)

Проверим достаточное условие экстремума. Найдем вторые частные производные функции z : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -0,4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -0,1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -0,6$. Вычислим их значения в критической точке M : $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_M = -0,4$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_M = -0,1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_M = -0,6$. Находим $\Delta = AC - B^2 = (-0,4)(-0,6) - (-0,1)^2 = 0,24 - 0,01 = 0,23 > 0$. Значит, найденная критическая точка является точкой экстремума, а так как $A < 0$, то это точка максимума.

Определим максимальное значение прибыли $z_{\max} = z \Big|_M = \frac{48000}{23}$. В данном случае предельная цена товара x равна $p_1 = 40$, а товара y равна $p_2 = 20$. Выражение «предельная цена товара равна предельным издержкам на производство этого товара» математически записывается в виде: $p_1 = \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \Big|_M$, $p_2 = \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \Big|_M$, где M – это точка экстремума. В нашем случае $\frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \Big|_M = 0,4 \cdot \frac{2200}{23} + 0,1 \cdot \frac{400}{23} = \frac{920}{23} = 40$, $\frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \Big|_M = 0,1 \cdot \frac{2200}{23} + 0,6 \cdot \frac{400}{23} = \frac{460}{23} = 20$.

Следовательно, известное правило экономики действительно выполняется.

Задачи для самостоятельного решения

8.29. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанной области:

- $z = x^2 y$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$;
- $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в области: $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$;
- $z = xy + x + y$ в области: $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \geq 2$, $y \leq 3$;
- $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в области: $1 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 2$;
- $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$ в области: $x \leq 3$, $y \geq 0$, $x - y + 1 \geq 0$.

8.30. При каких размерах открытая прямоугольная емкость объемом V имеет наименьшую поверхность?

8.31. Сечение канала должно иметь форму равнобокой трапеции заданной площади. Как выбрать его размеры, чтобы площадь поверхности канала, омываемая водой, была наименьшей?

8.32. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

8.33. Найти стороны участка в виде прямоугольного треугольника, имеющего при заданной площади S наименьший периметр.

8.34. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S .

8.7. Контрольные задания к главе 8

Вариант 1

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \ln(2x - 3y + 5)$.
2. Найти частные производные функции $z = x^2 + y^2 - 5xy + 2x + 3y - 6$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = x^3 - y^3 + 4xy$.
4. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$.
2. Найти частные производные функции $z = x^3 + 2y^4 + 8xy + x^3y^2 - yx^2$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = x^4y^4$.
4. Вычислить приближенное значение $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$.
5. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$.

Вариант 3

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$.
2. Найти частные производные функции $z = y \sin(3x + y)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \sin^3 x + \cos^2 y$.
4. Вычислить приближенное значение $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y - 80$.

Вариант 4

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \frac{1}{\sqrt{64 - x^2 - y^2}}$.
2. Найти частные производные функции $z = x \cos^2(y - 2x)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = (y + 2)x^{y-2}$.
4. Вычислить приближенное значение $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$.
5. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 5$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции и сделать чертеж:
 $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(16 - x^2 - y^2)}$.
2. Найти частные производные функции $z = \sqrt[5]{3xy}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.
4. Вычислить приближенное значение $(0,97)^{2,03}$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = y + \sqrt{x}$.
2. Найти частные производные функции $z = 3^{\sin(2x+3y)}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(1 + xy)$.
4. Вычислить приближенное значение $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.
5. Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \ln(2 + x + y) + \sqrt{xy}$.
2. Найти частные производные функции $z = \frac{2x - y}{x + 3y}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{y^2 - 1}$.
4. Вычислить приближенное значение $1,02 \cdot 9,97$.
5. Найти экстремумы функции $z = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции и сделать чертеж:

$$z = \arccos \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y).$$

2. Найти частные производные функции $z = \frac{2x^3}{1 - x^2 - y^2}.$

3. Найти полный дифференциал функции $z = e^x \cos y.$

4. Вычислить приближенное значение $(1,02)^2 \cdot (0,97)^2.$

5. Найти экстремумы функции $z = \frac{1 + x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$

Вариант 9

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}.$

2. Найти частные производные функции $z = \arccos \frac{y + 2}{x - 2}.$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x + \sqrt{x + y}}.$

4. Вычислить приближенное значение $\sin 31^\circ \cdot \cos 58^\circ.$

5. Найти экстремумы функции $z = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2.$

Вариант 10

1. Найти область определения функции и сделать чертеж: $z = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}.$

2. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arccctg} \frac{xy + 1}{xy - 1}.$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{1 + \sin^2 xy}.$

4. Вычислить приближенное значение $(6,02)^2 \cdot \sin 28^\circ.$

5. Найти экстремумы функции $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \quad (x > 0, \quad y > 0).$

Раздел V

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Глава 9. Неопределенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве X . Тогда функция $F(x)$, определенная на этом множестве, называется *первообразной функции* $f(x)$, если она дифференцируема для любых $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на множестве X , то любая другая первообразная функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$, где c – некоторая постоянная.

Совокупность $F(x) + c$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение. Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Операция нахождения всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

Перечислим основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования):

- 1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
- 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
- 3) $\int d(F(x)) = F(x) + c$;
- 4) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \quad (\alpha = \text{const}, \alpha \neq 0)$;
- 5) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int 0 \cdot dx = c.$
2. $\int 1 \cdot dx = x + c.$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1).$
4. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c.$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$
6. $\int e^x dx = e^x + c.$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1).$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq \pi n, n \in Z).$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad (|x| < 1).$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c \quad (|x| < |a|, a \neq 0).$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c.$
15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0).$
16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (a \neq 0, |x| \neq |a|).$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \quad (a \neq 0, \text{ в случае знака «минус» должно быть } |x| > |a|).$

Интегралы 1–17 называются табличными.

9.1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называют приведение данного интеграла к алгебраической сумме более простых интегралов, используя основные правила интегрирования (свойства 4 и 5 неопределенного интеграла), тождественные преобразования подынтегральной функции и таблицу основных интегралов.

Пример 9.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x}}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x^3 \sqrt{x}} = x^{-\frac{7}{2}}$, а затем применим формулу 3 таблицы основных интегралов и получим:

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1} + c = -\frac{2}{5} x^{-\frac{5}{2}} + c = -\frac{2}{5x^2 \sqrt{x}} + c.$$

Пример 9.2. Найти интеграл $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, а затем применим формулы и правила интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 dx &= \int \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^3} = \\ &= \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 3 \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = x - 3 \ln |x| + 3 \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c = \\ &= x - 3 \ln |x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.3. Найти интеграл $\int \left(\frac{6}{2x^2 + 9} + \frac{12}{2x^2 - 9}\right) dx$.

Решение. Используя правила 4 и 5 интегрирования и формулы 15, 16 таблицы интегралов, находим:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{6}{2x^2 + 9} + \frac{12}{2x^2 - 9}\right) dx &= \frac{6}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{12}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{\sqrt{2}}}{x + \frac{3}{\sqrt{2}}} \right| + c = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} - 3}{x\sqrt{2} + 3} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Решение. Данный интеграл приведем к табличному следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + c.$$

Пример 9.5. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \left(2 + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + c = \\ &= \frac{4}{3} x\sqrt{x} + x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.6. Найти интеграл $\int \frac{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x}{3^x} dx$.

Решение. Используя правило 5 интегрирования и формулу 7 таблицы интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x}{3^x} dx &= \int \left(5 - 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x\right) dx = 5 \int dx - 3 \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \\ &= 5x - 3 \cdot \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln \frac{5}{3}} + c = 5x - \frac{3}{\ln \frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.7. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx &= \int \frac{(e^x)^2-1^2}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} dx = \int (e^x-1) dx = \int e^x dx - \int dx = \\ &= e^x - x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.8. Найти интеграл $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$.

Решение. Сведем данный интеграл к сумме табличных путем преобразования подынтегральной функции и использования правила 5:

$$\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx = \int \left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \int e^x dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = e^x + \operatorname{tg} x + c.$$

Пример 9.9. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^5 e^x - x^4}{x^5} dx$.

Решение. Применяя правило 5 интегрирования и формулы 3, 6, 5 таблицы интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x} + x^5 e^x - x^4}{x^5} dx &= \int \left(x^{-\frac{14}{3}} + e^x - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^{-\frac{14}{3}} dx + \int e^x dx - \int \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^{-\frac{11}{3}}}{-\frac{11}{3}} + e^x - \ln |x| + c = -\frac{3}{11x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + e^x - \ln |x| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.10. Найти интеграл $\int a^x b^x 2^x dx$.

Решение. Согласно формуле 7 таблицы интегралов, имеем

$$\int a^x b^x 2^x dx = \int (2ab)^x dx = \frac{(2ab)^x}{\ln(2ab)} + c = \frac{(2ab)^x}{\ln 2 + \ln a + \ln b} + c.$$

Пример 9.11. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 4} + 3x^2}{x^2 - 1} dx$.

Решение. Записав числитель в виде $2\sqrt{x^2 - 1} + 3(x^2 - 1) + 3$ и почленно разделив его на знаменатель, получим сумму табличных интегралов 17, 2 и 16:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4x^2 - 4} + 3x^2}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{2\sqrt{x^2 - 1} + 3(x^2 - 1) + 3}{x^2 - 1} dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + 3 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \\ &= 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + 3x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.12. Найти интеграл $\int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

Решение. Используя формулу $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, имеем

$$\int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{2 - \cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int dx = \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} x + c.$$

Пример 9.13. Найти интеграл $\int 5 \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$.

$$\int 5 \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{5}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{5}{2} \int dx - \frac{5}{2} \int \cos x dx = \frac{5}{2} x - \frac{5}{2} \sin x + c.$$

Пример 9.14. Найти интеграл $\int (tgx + ctgx)^2 dx$.

Р е ш е н и е. Возведя подынтегральную функцию в квадрат и воспользовавшись формулами $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, $tgx \cdot ctgx = 1$, получим

$$\begin{aligned}\int (tgx + ctgx)^2 dx &= \int (tg^2 x + 2 + ctg^2 x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c.\end{aligned}$$

Пример 9.15. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Р е ш е н и е. Умножим числитель на «тригонометрическую» единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ и разделим затем почленно на знаменатель:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.1. $\int (x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 7) dx$.

9.2. $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$.

9.3. $\int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

9.4. $\int (a + bx)^2 dx$.

9.5. $\int (a - bx)^3 dx$.

9.6. $\int \frac{x-2}{x^3} dx$.

9.7. $\int \frac{(x+1)(x^2+6)}{3x^2} dx$.

9.8. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$.

9.9. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6} - \frac{7}{x^8} \right) dx$.

9.10. $\int \left(\frac{x^4}{5} - \frac{5}{x^4} \right) dx$.

9.11. $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3 dx$.

9.12. $\int \frac{9x^5 + 12x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{x^3} dx$.

9.13. $\int \frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2} dx$.

9.14. $\int \frac{(x^2+x+1)^2}{x^3} dx$.

9.15. $\int \frac{x^2-9}{x+3} dx$.

9.16. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

$$9.17. \int \frac{dx}{5-x^2}.$$

$$9.19. \int \frac{dx}{4x^2+1}.$$

$$9.21. \int \frac{x^2+4}{x^2-1} dx.$$

$$9.23. \int \frac{x^2}{x^2-1} dx.$$

$$9.25. \int \frac{x^2}{x^2-a^2} dx.$$

$$9.27. \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

$$9.29. \int (2\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x} - 5) dx.$$

$$9.31. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$9.33. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^3}{x} dx.$$

$$9.35. \int \left(\sqrt{x^7} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx.$$

$$9.37. \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x} \right)^2 dx.$$

$$9.39. \int \sqrt{3ax} \, dx \quad (a > 0).$$

$$9.41. \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$9.43. \int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{8}{1+x^2} \right) dx.$$

$$9.45. \int \frac{5-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$9.18. \int \frac{dx}{2x^2+8}.$$

$$9.20. \int \frac{x^3+9x-2}{x^2+9} dx.$$

$$9.22. \int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

$$9.24. \int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$$

$$9.26. \int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx.$$

$$9.28. \int (3x - \sqrt{x})^2 dx.$$

$$9.30. \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3} \right) dx.$$

$$9.32. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$$

$$9.34. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$9.36. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx.$$

$$9.38. \int \frac{(1-x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$9.40. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$9.42. \int \left(\frac{5}{2+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2-x^2}} \right) dx.$$

$$9.44. \int \frac{3+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$9.46. \int \frac{\sqrt{3-x^2} + \sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx.$$

$$9.47. \int e^x \left(5 + \frac{3e^{-x}}{x^4} \right) dx.$$

$$9.49. \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx.$$

$$9.51. \int e^{3x} \cdot 3^x dx.$$

$$9.53. \int \frac{5^{x+2} + 7^{x+1}}{35^x} dx.$$

$$9.55. \int 2^x \left(1 - \frac{2^{-x}}{\sqrt{x^5}} \right) dx.$$

$$9.57. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$9.59. \int ctg^2 x dx.$$

$$9.61. \int \left(3 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

$$9.63. \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cos x - 1 \right) dx.$$

$$9.65. \int \frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x} dx.$$

$$9.67. \int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx.$$

$$9.69. \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$$

$$9.71. \int \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$$

$$9.73. \int (tg x - 2ctg x)^2 dx.$$

$$9.75. \int \frac{a + bctg^2 x}{c + c \cdot \cos 2x} dx.$$

$$9.48. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx.$$

$$9.50. \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx.$$

$$9.52. \int \frac{3^{2x} - 5^x}{3^x} dx.$$

$$9.54. \int \frac{2^{x-1} + 3^{x+1}}{15^x} dx.$$

$$9.56. \int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$$

$$9.58. \int tg^2 x dx.$$

$$9.60. \int (3 \sin x - 4 \cos x) dx.$$

$$9.62. \int \frac{8 - 7 \cos^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$9.64. \int \frac{\cos 2x}{4 \cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$$

$$9.66. \int (x^2 + 2 \sin x - 3e^x) dx.$$

$$9.68. \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + 3 \sin x - 5 \right) dx.$$

$$9.70. \int \frac{dx}{1 + \cos 2x}.$$

$$9.72. \int \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

$$9.74. \int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$9.76. \int \frac{a - bctg^2 x}{c \cdot \sin^2 x} dx.$$

9.2. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала и методом подстановки

Если нахождение интеграла $\int f(x)dx$ затруднительно, то пользуются *методом подстановки* или *методом замены переменной*. При применении этого метода используют подстановки двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $x = \varphi(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . В этом случае $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$;

2) $u = \Psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке

$$\int f(\Psi(x))\Psi'(x)dx = \int f(\Psi(x))d(\Psi(x)) = \int f(u)du.$$

Эта процедура называется *подведением функции $u = \Psi(x)$ под знак дифференциала* и, фактически, эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u = \Psi(x)$.

В простых случаях введения новой переменной u необходимо иметь в виду следующие преобразования дифференциала dx :

1. $dx = d(x + a)$, где a – постоянная величина.

2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, где постоянная $a \neq 0$.

3. $dx = \frac{1}{a}d(ax + b)$, где постоянная $a \neq 0$.

4. $x dx = \frac{1}{2}d(x^2)$.

5. $x dx = \frac{1}{2}d(x^2 + b)$.

6. $\sin x dx = -d(\cos x)$.

7. $\cos x dx = d(\sin x)$.

8. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

В общем случае $\Psi'(x)dx = d\Psi(x)$.

Пример 9.16. Найти интеграл $\int (3x + 5)^{20} dx$.

Решение. Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Здесь достаточно развернуть выражение $(3x + 5)^{20}$ по формуле бинома Ньютона и применить почленное интегрирование. Однако этот способ связан с большим количеством вычислений. При помощи замены переменной можно

сразу свести данный интеграл к табличному. Полагая $3x + 5 = t$, имеем $3dx = dt$, т.е. $dx = \frac{1}{3} dt$. Отсюда получаем

$$\int (3x + 5)^{20} dx = \frac{1}{3} \int t^{20} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{21} t^{21} + c = \frac{1}{63} (3x + 5)^{21} + c.$$

Пример 9.17. Найти интеграл $\int x^2 \sqrt[7]{2x^3 + 3} dx$.

Решение. Так как $d(2x^3 + 3) = 6x^2 dx$, то, применяя метод подведения под знак дифференциала, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[7]{2x^3 + 3} dx &= \frac{1}{6} \int (2x^3 + 3)^{\frac{1}{7}} 6x^2 dx = \frac{1}{6} \int (2x^3 + 3)^{\frac{1}{7}} d(2x^3 + 3) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} (2x^3 + 3)^{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{48} (2x^3 + 3)^{\frac{8}{7}} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.18. Найти интеграл $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} + 1}$.

Решение. Применим подстановку $x^5 = t$. Тогда $5x^4 dx = dt$, $x^4 dx = \frac{1}{5} dt$ и $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} + 1} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{5} \arctgt + c = \frac{1}{5} \arctgx^5 + c$.

Пример 9.19. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{49 - x^4}}$.

Решение. Находим

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{49 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{\sqrt{7^2 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{7^2 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{7} + c.$$

Пример 9.20. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20}$.

Решение. Выделив полный квадрат в знаменателе $x^2 - 4x + 20 = (x - 2)^2 + 16$, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 16} = \int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \arctg \frac{x - 2}{4} + c.$$

Пример 9.21. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{2x^4 - 6\sqrt{2}x^2 - 16}$.

Решение. Поступим так же, как в примере 9.20:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{2x^4 - 6\sqrt{2}x^2 - 16} &= \int \frac{xdx}{(\sqrt{2}x^2 - 3)^2 - 25} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2\sqrt{2}xdx}{(\sqrt{2}x^2 - 3)^2 - 25} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x^2 - 3)}{(\sqrt{2}x^2 - 3)^2 - 5^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x^2 - 8}{\sqrt{2}x^2 + 2} \right| + c = \frac{1}{20\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - 4\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.22. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x-3} dx$.

Решение. Записав числитель в виде $(x-3)+4$, почленно разделив его на знаменатель и применив формулы 2 и 5 таблицы интегралов, имеем:

$$\int \frac{x+1}{x-3} dx = \int \frac{(x-3)+4}{x-3} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-3}\right) dx = \int dx + 4 \int \frac{dx}{x-3} = \int dx + 4 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ = x + 4 \ln |x-3| + c.$$

Пример 9.23. Найти интеграл $\int \frac{x(2+3x^2)}{6+x^4} dx$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, приведем к сумме двух интегралов:

$$\int \frac{x(2+3x^2)}{6+x^4} dx = \int \frac{2x dx}{6+x^4} + 3 \int \frac{x^3}{6+x^4} dx = \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + (\sqrt{6})^2} + \frac{3}{4} \int \frac{4x^3 dx}{6+x^4} = \\ = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4} \int \frac{d(x^4+6)}{x^4+6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{4} \ln(x^4+6) + c.$$

Пример 9.24. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1-x$:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 9.25. Найти интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$.

Решение. Положим $\sqrt{2x-1} = t$, тогда $x = \frac{t^2+1}{2}$, $dx = t dt$ и

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx = \int \frac{e^t \cdot t}{t} dt = \int e^t dt = e^{\sqrt{2x-1}} + c.$$

Пример 9.26. Найти интеграл $\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}+3} dx$.

Решение. Сделаем замену $e^{-2x} = t$, тогда $-2e^{-2x} dx = dt$ и

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}+3} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2e^{-2x}}{(e^{-2x})^2+3} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + c = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{3}} + c = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}e^{2x}} + c.$$

Пример 9.27. Найти интеграл $\int \sin(1-5x)dx$.

Решение. Заметив, что $d(1-5x) = -5dx$, имеем

$$\int \sin(1-5x)dx = -\frac{1}{5} \int \sin(1-5x)(-5)dx = -\frac{1}{5} \int \sin(1-5x)d(1-5x) = \frac{1}{5} \cos(1-5x) + c.$$

Пример 9.28. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1+\operatorname{ctgx}}}$.

Решение. Так как $d(1+\operatorname{ctgx}) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$, то интеграл приводится к

виду
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1+\operatorname{ctgx}}} = -\int \frac{d(1+\operatorname{ctgx})}{\sqrt{1+\operatorname{ctgx}}} = -\int (1+\operatorname{ctgx})^{-\frac{1}{2}} d(1+\operatorname{ctgx}) =$$
$$= -\frac{(1+\operatorname{ctgx})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1+\operatorname{ctgx}} + c.$$

Пример 9.29. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos x dx$.

Решение. Так как $d(\sin x) = \cos x dx$, то

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c.$$

Пример 9.30. Найти интеграл $\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x + 4} dx$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $d(\cos^2 2x) = -4\cos 2x \cdot \sin 2x dx$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$, получим

$$\int \frac{\sin 4x}{\cos^4 2x + 4} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-4)\sin 2x \cos 2x}{(\cos^2 2x)^2 + 2^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos^2 2x)}{(\cos^2 2x)^2 + 2^2} =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos^2 2x}{2} + c = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{\cos^2 2x}{2} + c.$$

Пример 9.31. Найти интеграл $\int \sin^2 8x dx$.

Решение. Применяя формулу $\sin^2 8x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$, имеем

$$\int \sin^2 8x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) =$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + c.$$

Пример 9.32. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}$.

Решение. Так как $d(2+3\ln x) = \frac{3}{x}dx$, то

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}} &= \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{x\sqrt{2+3\ln x}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(2+3\ln x)}{\sqrt{2+3\ln x}} = \frac{1}{3} \int (2+3\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(2+3\ln x) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(2+3\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{2+3\ln x} + c.\end{aligned}$$

Пример 9.33. Найти интеграл $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx + \int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = -\frac{1}{18} \int \frac{(-18)x}{\sqrt{1-9x^2}} dx - \\ &- \frac{1}{3} \int \frac{(\arccos 3x)^2 (-3)}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx = -\frac{1}{18} \int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-9x^2) - \frac{1}{3} \int (\arccos 3x)^2 d(\arccos 3x) = \\ &= -\frac{1}{18} \cdot \frac{(1-9x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(\arccos 3x)^3}{3} + c = -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{9} (\arccos 3x)^3 + c.\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.77. $\int (5-2x)^6 dx$.

9.78. $\int x^3(1-2x^4)^3 dx$.

9.79. $\int \frac{dx}{3-5x}$.

9.80. $\int \frac{x}{5-3x^2} dx$.

9.81. $\int \frac{x}{(x^2-1)^3} dx$.

9.82. $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$.

9.83. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

9.84. $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

9.85. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

9.86. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$.

$$9.87. \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx.$$

$$9.89. \int \frac{x^2}{5+x^6} dx.$$

$$9.91. \int \frac{x}{2x^4+5} dx.$$

$$9.93. \int \frac{dx}{\sqrt{2-7x}}.$$

$$9.95. \int \sqrt[3]{1-2x} dx;$$

$$9.97. \int \sqrt[3]{x^3-3} \cdot x^2 dx.$$

$$9.99. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-3x^3}} dx.$$

$$9.101. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

$$9.103. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$9.105. \int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}} dx.$$

$$9.107. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$9.109. \int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} dx.$$

$$9.111. \int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$9.113. \int x\sqrt{x+3} dx.$$

$$9.115. \int x^2\sqrt{x^3+1} dx.$$

$$9.117. \int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx.$$

$$9.88. \int \frac{6x^2-6x+1}{2x^3-3x^2+x-2} dx.$$

$$9.90. \int \frac{x}{x^4+4x^2+5} dx.$$

$$9.92. \int \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$9.94. \int \sqrt{3x+1} dx.$$

$$9.96. \int x\sqrt{x^2-1} dx.$$

$$9.98. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$9.100. \int \frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

$$9.102. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$9.104. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$9.106. \int \frac{x}{\sqrt{3x^4-1}} dx.$$

$$9.108. \int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}} dx.$$

$$9.110. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}} dx.$$

$$9.112. \int x\sqrt{1-x} dx.$$

$$9.114. \int (x-1)\sqrt{x+1} dx.$$

$$9.116. \int x^3\sqrt{x^2-1} dx.$$

$$9.118. \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} dx.$$

$$9.119. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$9.121. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$9.123. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$$

$$9.125. \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

$$9.127. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$9.129. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$$

$$9.131. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$9.133. \int \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) dx.$$

$$9.135. \int x^2 e^{x^3+1} dx.$$

$$9.137. \int (2^x + 5^x)^2 dx.$$

$$9.139. \int \frac{e^{3x} + 8}{e^x + 2} dx.$$

$$9.141. \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 5} dx.$$

$$9.143. \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$9.145. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$9.147. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$9.149. \int \frac{e^{-x}}{e - e^{-2x}} dx.$$

$$9.120. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x}}.$$

$$9.122. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

$$9.124. \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}.$$

$$9.126. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$9.128. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$9.130. \int \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$9.132. \int e^{-5x} dx.$$

$$9.134. \int e^{-x^2} x dx.$$

$$9.136. \int e^{x^4} x^3 dx.$$

$$9.138. \int \frac{e^x}{7 + e^x} dx.$$

$$9.140. \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 6} dx.$$

$$9.142. \int \frac{e^{2x}}{2 - 3e^{2x}} dx.$$

$$9.144. \int \frac{dx}{1 + e^{5x}}.$$

$$9.146. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 2}}.$$

$$9.148. \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{16 - e^x}} dx.$$

$$9.150. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx.$$

$$9.151. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$9.153. \int \frac{(2 \ln x + 1)^3}{x} dx.$$

$$9.155. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$9.157. \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}.$$

$$9.159. \int \frac{\ln x}{x \sqrt{1 - 2 \ln x - \ln^2 x}} dx.$$

$$9.161. \int \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$9.163. \int \sin(a - bx) dx.$$

$$9.165. \int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$$

$$9.167. \int \sin x \cos x dx.$$

$$9.169. \int \sin x \sin 5x dx.$$

$$9.171. \int \cos 5x \cos 7x dx.$$

$$9.173. \int \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)^3 \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$9.175. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$9.177. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$9.179. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$9.181. \int \sin^5 x dx.$$

$$9.183. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$9.185. \int \cos^6 x dx.$$

$$9.152. \int \frac{dx}{x(3 + \ln x)}.$$

$$9.154. \int \frac{dx}{(3x - 1) \ln(3x - 1)}.$$

$$9.156. \int \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{x} dx.$$

$$9.158. \int \frac{\ln x}{x \sqrt{2 + \ln x}} dx.$$

$$9.160. \int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx.$$

$$9.162. \int \sin 3x dx.$$

$$9.164. \int \cos(a - bx) dx.$$

$$9.166. \int \frac{dx}{\sin^2 2x}.$$

$$9.168. \int x^2 \cos(x^3 + 1) dx.$$

$$9.170. \int \sin 2x \cos 3x dx.$$

$$9.172. \int \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^2 \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$9.174. \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$$

$$9.176. \int \cos^3 x \sin x dx.$$

$$9.178. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$9.180. \int \frac{dx}{\operatorname{ctg} 5x}.$$

$$9.182. \int \cos^5 x dx.$$

$$9.184. \int \sin^6 x dx.$$

$$9.186. \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx.$$

$$9.187. \int \operatorname{ctg}^5 x \, dx.$$

$$9.189. \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx.$$

$$9.191. \int \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$9.193. \int \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$9.195. \int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} \, dx;$$

$$9.197. \int \frac{\sin 2x}{1 + 3 \cos^2 x} \, dx.$$

$$9.199. \int \frac{2 + \sin 2x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$9.201. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4 \cos x + 5} \, dx.$$

$$9.203. \int \frac{2 + 3 \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$9.205. \int \frac{a + \sin^3 x}{b - b \cos 2x} \, dx.$$

$$9.207. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} \, dx.$$

$$9.209. \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 2 \cos x}} \, dx.$$

$$9.211. \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{4 + 7 \sin x}} \, dx.$$

$$9.213. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$9.215. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x}} \, dx.$$

$$9.217. \int \frac{x + \arcsin 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx.$$

$$9.219. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx.$$

$$9.188. \int \operatorname{tg}^3 x \, dx.$$

$$9.190. \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \, dx.$$

$$9.192. \int \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} \, dx.$$

$$9.194. \int \frac{\sin 2x}{1 + 2 \cos 2x} \, dx.$$

$$9.196. \int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$9.198. \int \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \, dx.$$

$$9.200. \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} \, dx.$$

$$9.202. \int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$9.204. \int \frac{5 - 4 \cos^3 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$9.206. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7 - \cos^4 x}} \, dx.$$

$$9.208. \int \frac{\sin x}{\sqrt{3 + 5 \cos x}} \, dx.$$

$$9.210. \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} \, dx.$$

$$9.212. \int \frac{x}{\sin^2 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \, dx.$$

$$9.214. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} \, dx.$$

$$9.216. \int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx.$$

$$9.218. \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x} \, dx.$$

$$9.220. \int \sqrt{\frac{\arcsin 2x}{1 - 4x^2}} \, dx.$$

9.3. Интегрирование по частям

Одним из эффективных методов интегрирования является *метод интегрирования по частям*. Этот метод чаще всего применяется для интегрирования некоторых трансцендентных функций (например, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arctg x$), а также произведений алгебраических и трансцендентных функций. Суть его состоит в следующем. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции, кроме того, на этом интервале существует интеграл $\int v du$, то на нем существует интеграл $\int u dv$ и имеет место формула

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Это соотношение называется *формулой интегрирования по частям*. При использовании этой формулы подынтегральное выражение нужно разбивать на два множителя u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и $v du$ было более простым, чем интегрирование исходного выражения $u dv$. Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Для интегралов вида

$$\int Q(x)e^{ax} dx, \quad \int Q(x)\sin ax dx, \quad \int Q(x)\cos ax dx,$$

где $Q(x)$ – многочлен, в качестве u следует брать $Q(x)$, а в качестве dv – выражения $e^{ax} dx$, $\sin ax dx$, $\cos ax dx$ соответственно.

В случае интегралов вида

$$\int Q(x)\ln x dx, \quad \int Q(x)\arcsin x dx, \quad \int Q(x)\arccos x dx, \\ \int Q(x)\arctg x dx, \quad \int Q(x)\operatorname{arcctg} x dx$$

в качестве u берут функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$, а в качестве dv – выражение $Q(x)dx$.

Интегрирование по частям иногда приводит к интегралу, совпадающему с исходным или сводящемуся к нему. В этом случае интеграл находится из получающегося относительно исходного интеграла уравнения.

Пример 9.34. Найти интеграл $\int (5 - x^2)e^{2x} dx$.

Решение. Положим $u = 5 - x^2$, $dv = e^{2x} dx$. Тогда

$$v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x}, \quad du = -2x dx.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (5 - x^2)e^{2x} dx = \frac{1}{2} (5 - x^2)e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-2x) dx = \frac{1}{2} (5 - x^2)e^{2x} + \int x e^{2x} dx.$$

Итак, мы понизили степень x на единицу. Поступим аналогично с интегралом $\int x e^{2x} dx$, т.е. еще раз применим интегрирование по частям: за u возьмем x , а за dv – $e^{2x} dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$. Для упрощения вычислений при переходе от dv к v можно полагать $c = 0$. Следовательно,

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + c. \text{ Окончательно имеем}$$

$$\int (5 - x^2) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (5 - x^2) e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c.$$

Пример 9.35. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{(3 - x^2)^2} dx$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(3 - x^2)^2} dx &= [u = x, dv = (3 - x^2)^{-2} x dx, du = dx, v = \int (3 - x^2)^{-2} x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int (3 - x^2)^{-2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int (3 - x^2)^{-2} d(3 - x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 - x^2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2(3 - x^2)}] = \\ &= \frac{x}{2(3 - x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{3 - x^2} = \frac{x}{2(3 - x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 - x^2} = \frac{x}{2(3 - x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{x}{2(3 - x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + c = \frac{x}{2(3 - x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.36. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$.

Решение. Представив числитель в виде $\frac{1}{a^2} ((a^2 + x^2) - x^2)$ и разделив его почленно на знаменатель, получим два интеграла. Ко второму применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \\ &= \left[u = x, dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^3}, du = dx, v = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^3} = \right. \\ &= \left. \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)^{-3} d(x^2 + a^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + a^2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(x^2 + a^2)^2} \right] = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} - \\ &- \frac{1}{a^2} \left(-\frac{x}{4(x^2 + a^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \right) = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{4a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \\ &+ \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} = \frac{3}{4a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2}. \end{aligned}$$

В результате применения формулы мы понизили степень знаменателя на единицу и получили аналогичный интеграл, к которому вторично применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\
&= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \left[u = x, dv = \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^2}, du = dx, \right. \\
v &= \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)^{-2} d(x^2 + a^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + a^2)^{-1}}{-1} = \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + a^2)} \left. \right] = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \left(-\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \right) = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \\
&+ \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \\
&= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + c.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} &= \frac{3}{4a^2} \left(\frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + c \right) + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} = \\
&= \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + c.
\end{aligned}$$

Пример 9.37. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, если $a > 0$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[u = \sqrt{a^2 - x^2}, dv = dx, du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, v = x \right] = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \\
&- \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + c_1.
\end{aligned}$$

Мы получили уравнение относительно исходного интеграла, из которого находим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

Пример 9.38. Найти интеграл $\int \log_3(5x + 1) dx$.

Решение. Так как $\log_3(5x + 1) = \frac{1}{\ln 3} \ln(5x + 1)$, то

$$\begin{aligned}
\int \log_3(5x+1) dx &= \frac{1}{\ln 3} \int \ln(5x+1) dx = \left[u = \ln(5x+1), \quad dv = dx, \quad du = \frac{5dx}{5x+1}, \quad v = x \right] = \\
&= \frac{1}{\ln 3} \left(x \ln(5x+1) - \int \frac{5x}{5x+1} dx \right) = \frac{1}{\ln 3} \left(x \ln(5x+1) - \int \frac{(5x+1)-1}{5x+1} dx \right) = \\
&= \frac{1}{\ln 3} \left(x \ln(5x+1) - \int dx + \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+1)}{5x+1} \right) = \frac{1}{\ln 3} \left(x \ln(5x+1) - x + \frac{1}{5} \ln(5x+1) \right) + c = \\
&= \frac{1}{\ln 3} \left(\left(x + \frac{1}{5} \right) \ln(5x+1) - x \right) + c.
\end{aligned}$$

Пример 9.39. Найти интеграл $\int (x^2 - x + 1) \cos 5x dx$.

Решение. Так как одним из множителей является многочлен второй степени, то найдем данный интеграл, применив последовательно два раза формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - x + 1) \cos 5x dx &= [u = x^2 - x + 1, \quad dv = \cos 5x dx, \quad du = (2x - 1) dx, \\
v &= \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5} \sin 5x] = \frac{x^2 - x + 1}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \int (2x - 1) \sin 5x dx = \\
&= \left[u = 2x - 1, \quad dv = \sin 5x dx, \quad du = 2 dx, \quad v = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x \right] = \\
&= \frac{x^2 - x + 1}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \left(-\frac{2x - 1}{5} \cos 5x + \frac{2}{5} \int \cos 5x dx \right) = \frac{x^2 - x + 1}{5} \sin 5x + \\
&+ \frac{2x - 1}{25} \cos 5x - \frac{2}{125} \int \cos 5x d(5x) = \frac{x^2 - x + 1}{5} \sin 5x + \frac{2x - 1}{25} \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x + c = \\
&= \frac{2x - 1}{25} \cos 5x + \frac{1}{5} \left(x^2 - x + \frac{23}{25} \right) \sin 5x + c.
\end{aligned}$$

Пример 9.40. Найти интеграл $\int e^{ax} \sin(bx) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \sin(bx) dx &= \left[u = e^{ax}, \quad dv = \sin(bx) dx, \quad du = ae^{ax} dx, \quad v = \int \sin(bx) dx = \right. \\
&= \left. \frac{1}{b} \int \sin(bx) d(bx) = -\frac{1}{b} \cos(bx) \right] = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx) dx = \\
&= \left[u = e^{ax}, \quad dv = \cos(bx) dx, \quad du = ae^{ax} dx, \quad v = \int \cos(bx) dx = \frac{1}{b} \int \cos(bx) d(bx) = \frac{1}{b} \sin(bx) \right] = \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right) + c.
\end{aligned}$$

Из полученного относительно исходного интеграла уравнения находим

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx + \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + c. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{b^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) \right) + c = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + c. \end{aligned}$$

Пример 9.41. Найти интеграл $\int \sin(\ln x) dx$.

Решение. Применим подстановку $\ln x = t$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и $\int \sin(\ln x) dx = \int e^t \sin t dt$. Последний интеграл уже найден в общем виде с помощью интегрирования по частям (см. пример 9.40), поэтому

$$\int \sin(\ln x) dx = \int e^t \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + c = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c.$$

Пример 9.42. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \left[\sqrt[3]{x} = t, x = t^3, dx = 3t^2 dt \right] = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int t \operatorname{arctg} t dt = \\ &= \left[u = \operatorname{arctg} t, dv = t dt, du = \frac{dt}{1+t^2}, v = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 \right] = \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \right) = \frac{3}{2} t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} \int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt = \frac{3}{2} t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} \int dt + \\ &+ \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2} t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{3}{2} t + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{3}{2} ((t^2+1) \operatorname{arctg} t - t) + c = \\ &= \frac{3}{2} ((\sqrt[3]{x^2}+1) \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}) + c. \end{aligned}$$

Пример 9.43. Найти интеграл $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}} dx$.

Решение. Находим

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}} dx = \left[u = \arcsin x, dv = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}}, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}} = \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{(1-x^2)^2 \sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2 = \frac{1}{t}, \quad x^2 = 1 - \frac{1}{t}, \quad x = \sqrt{\frac{t-1}{t}}, \quad dx = \frac{1}{2t^2} \sqrt{\frac{t}{t-1}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{t}{t-1}} \cdot t^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\sqrt{t-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)+1}{\sqrt{t-1}} dt = \frac{1}{2} \int (t-1)^{\frac{1}{2}} d(t-1) + \\
&+ \frac{1}{2} \int (t-1)^{-\frac{1}{2}} d(t-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (t-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} 2\sqrt{t-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} = \\
&= \frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \Bigg| = \frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{(3x-2x^3)dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{(3x-2x^3)dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x(3-2x^2)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \\
&+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{(4x^3-4x)-2x}{(1-x^2)^2} dx = \frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \frac{1}{6} \int \frac{d(1-2x^2+x^4)}{1-2x^2+x^4} - \frac{1}{3} \int \frac{xdx}{(1-x^2)^2} = \\
&= \frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \frac{1}{3} \ln(1-x^2) + \frac{1}{6} \int \frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \frac{1}{3} \ln(1-x^2) - \\
&- \frac{1}{6(1-x^2)} + C.
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.221. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

9.222. $\int x e^x dx$.

9.223. $\int x e^{-x} dx$.

9.224. $\int (x+3) e^x dx$.

9.225. $\int (x^2 + 3x - 5) e^{\frac{x}{3}} dx$.

9.226. $\int (5x^2 + 7x - 1) e^{\frac{x}{2}} dx$.

9.227. $\int (2x-7) e^{2x} dx$.

9.228. $\int e^{\sqrt{3x}} dx$.

9.229. $\int e^{\sqrt[4]{x+1}} dx$.

9.230. $\int x e^{3x} dx$.

9.231. $\int x e^{-4x} dx$.

9.232. $\int x 2^x dx$.

9.233. $\int x 7^x dx$.

9.234. $\int (ax+b) e^{\alpha x} dx$.

9.235. $\int \frac{x}{\pi} e^{2n\pi x} dx$.

9.236. $\int x^2 e^x dx$.

- 9.237. $\int x^2 e^{-x} dx$.
- 9.239. $\int x^2 e^{\frac{x}{3}} dx$.
- 9.241. $\int (e^x - x)^2 dx$.
- 9.243. $\int x^3 e^{-x} dx$.
- 9.245. $\int x^3 e^{x^2} dx$.
- 9.247. $\int x^5 e^{x^2} dx$.
- 9.249. $\int (e^x + x)^3 dx$.
- 9.251. $\int e^{\frac{x}{2}} \sin 3x dx$.
- 9.253. $\int e^{-2x} \sin x dx$.
- 9.255. $\int e^{-2x} \sin^2 x dx$.
- 9.257. $\int e^x \cos 3x dx$.
- 9.259. $\int e^{2x} \cos \frac{x}{2} dx$.
- 9.261. $\int e^{ax} \cos(bx) dx$.
- 9.263. $\int \sqrt{25 - x^2} dx$.
- 9.265. $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx$.
- 9.267. $\int \sqrt{x^2 + 7} dx$.
- 9.269. $\int \ln x dx$.
- 9.271. $\int \ln 5x dx$.
- 9.273. $\int \ln(x^2 - 1) dx$.
- 9.275. $\int x \ln x dx$.
- 9.277. $\int x \ln(x + 1) dx$.
- 9.279. $\int (2x + 1) \ln(x - 1) dx$.
- 9.281. $\int x^2 \ln \frac{x}{3} dx$.
- 9.283. $\int (x^2 - 2x + 2) \ln x dx$.
- 9.238. $\int x^2 e^{5x} dx$.
- 9.240. $\int (x^2 + 2) e^{-2x} dx$.
- 9.242. $\int (e^x + x + 1)^2 dx$.
- 9.244. $\int x^3 e^{-2x} dx$.
- 9.246. $\int x^3 (e^{x-1} + e^{1-x}) dx$.
- 9.248. $\int \frac{x e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$.
- 9.250. $\int e^x \sin x dx$.
- 9.252. $\int e^{2x} \sin 5x dx$.
- 9.254. $\int e^x \sin^2 \frac{x}{4} dx$.
- 9.256. $\int e^{-2ax} \sin^2(bx) dx$.
- 9.258. $\int (e^x - 1)^2 \cos x dx$.
- 9.260. $\int e^{4x} \cos(e^{2x}) dx$.
- 9.262. $\int x e^x \sin x dx$.
- 9.264. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$.
- 9.266. $\int \sqrt{x^2 + 9} dx$.
- 9.268. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.
- 9.270. $\int \ln(x + 2) dx$.
- 9.272. $\int \ln(9 - x) dx$.
- 9.274. $\int \log_2(1 - 2x) dx$.
- 9.276. $\int x \ln 3x dx$.
- 9.278. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.
- 9.280. $\int x^2 \ln x dx$.
- 9.282. $\int x^2 \ln(2 + x) dx$.
- 9.284. $\int x^3 \ln(x + 3) dx$.

- 9.285.** $\int (x^3 - 8) \ln 2x \, dx$.
9.287. $\int x \ln^2 3x \, dx$.
9.289. $\int (x-1)^2 \ln^2 x \, dx$.
9.291. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.
9.293. $\int \frac{\ln 2x}{x^3} \, dx$.
9.295. $\int \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} \, dx$.
9.297. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} \, dx$.
9.299. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 \, dx$.
9.301. $\int \sin \sqrt{2x} \, dx$.
9.303. $\int x \sin 4x \, dx$.
9.305. $\int (x-3) \sin 2x \, dx$.
9.307. $\int x^2 \sin x \, dx$.
9.309. $\int (2x^2 - 3) \sin 2x \, dx$.
9.311. $\int (x^2 - x + 3) \sin \frac{x}{2} \, dx$.
9.313. $\int x^3 \sin x \, dx$.
9.315. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \, dx$.
9.317. $\int \frac{x-1}{\sin^2 x} \, dx$.
9.319. $\int \sin(\ln 5x) \, dx$.
9.321. $\int \sin\left(\ln \frac{x}{9}\right) \, dx$.
9.323. $\int (x-1) \cos \sqrt{x} \, dx$.
9.325. $\int x \cos 3x \, dx$.
9.327. $\int \frac{x-1}{4} \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx$.
9.286. $\int \ln^2 x \, dx$.
9.288. $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x \, dx$.
9.290. $\int (x^2 + 3x) \ln x \, dx$.
9.292. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$.
9.294. $\int \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}} \, dx$.
9.296. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$.
9.298. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx$.
9.300. $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$.
9.302. $\int x \sin x \, dx$.
9.304. $\int (x+2) \sin 5x \, dx$.
9.306. $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$.
9.308. $\int x^2 \sin 7x \, dx$.
9.310. $\int (x^2 + a) \sin 2x \, dx$.
9.312. $\int (x^2 - 2x + 3) \sin 3x \, dx$.
9.314. $\int x^3 \sin x^2 \, dx$.
9.316. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$.
9.318. $\int \frac{x}{\sin^2 6x} \, dx$.
9.320. $\int \sin\left(\ln \frac{x}{3}\right) \, dx$.
9.322. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$.
9.324. $\int x \cos x \, dx$.
9.326. $\int (9x-1) \cos 2x \, dx$.
9.328. $\int x^2 \cos x \, dx$.

- 9.329. $\int x^2 \cos 5x \, dx.$
- 9.331. $\int (ax^2 + bx + c) \cos \alpha x \, dx.$
- 9.333. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$
- 9.335. $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx.$
- 9.337. $\int \cos(\ln x) \, dx.$
- 9.339. $\int \cos(3 \ln x) \, dx.$
- 9.341. $\int \arcsin x \, dx.$
- 9.343. $\int \arcsin \sqrt{x} \, dx.$
- 9.345. $\int x \arcsin x \, dx.$
- 9.347. $\int (x-1)^2 \arcsin x \, dx.$
- 9.349. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx.$
- 9.351. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{2x+1}} \, dx.$
- 9.353. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx.$
- 9.355. $\int \arccos x \, dx.$
- 9.357. $\int \arccos 3x \, dx.$
- 9.359. $\int (x^2 + 1) \arccos x \, dx.$
- 9.361. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \, dx.$
- 9.363. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$
- 9.365. $\int \arctg \frac{x}{5} \, dx.$
- 9.367. $\int \arctg \sqrt{x} \, dx.$
- 9.330. $\int (2x^2 + x + 1) \cos x \, dx.$
- 9.332. $\int (x+1)^3 \cos x \, dx.$
- 9.334. $\int x \cos^2 2x \, dx.$
- 9.336. $\int (e^x + \cos x)^2 \, dx.$
- 9.338. $\int \cos\left(\ln \frac{x}{3}\right) \, dx.$
- 9.340. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx.$
- 9.342. $\int \arcsin \frac{x}{2} \, dx.$
- 9.344. $\int \arcsin \sqrt{2x} \, dx.$
- 9.346. $\int x \arcsin 3x \, dx.$
- 9.348. $\int \arcsin^2 x \, dx.$
- 9.350. $\int \frac{\arcsin \sqrt{3x}}{\sqrt{1-3x}} \, dx.$
- 9.352. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} \, dx.$
- 9.354. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{x^2} \, dx.$
- 9.356. $\int \arccos \frac{x}{2} \, dx.$
- 9.358. $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx.$
- 9.360. $\int \frac{\arccos \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \, dx.$
- 9.362. $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx.$
- 9.364. $\int \arctg x \, dx.$
- 9.366. $\int \arctg 6x \, dx.$
- 9.368. $\int \arctg \sqrt{2x+1} \, dx.$

$$9.369. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$9.370. \int x \operatorname{arctg} 9x dx.$$

$$9.371. \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx.$$

$$9.372. \int (x^2 + 2) \operatorname{arctg} x dx.$$

$$9.373. \int \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} dx.$$

$$9.374. \int x \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} dx.$$

$$9.375. \int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

$$9.376. \int (x - 4) \operatorname{arctg} 2x dx.$$

9.4. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находится непосредственно:

$$\begin{aligned} \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx &= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \dots + \\ &+ a_{n-1} \int x dx + a_n \int dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + c. \end{aligned}$$

Функция, заданная в виде отношения двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0),$$

называется *дробной рациональной функцией* (или *рациональной дробью*).

В дальнейшем будем считать, что коэффициент $b_0 = 1$, так как в противном случае можно разделить числитель и знаменатель на этот коэффициент.

Если $n < m$, рациональная дробь называется *правильной*, в противном случае – *неправильной*.

Любая правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет только действительные корни $a, b, \dots, l$ кратности $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, т.е. $Q_m(x)$ представим в виде $Q_m(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$, разлагается на сумму конечного числа простейших рациональных дробей, и это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ &+ \dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}, \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \dots, L_\lambda$ – действительные числа.

Если знаменатель имеет действительные и комплексные корни, т.е. раскладывается на линейные и квадратичные множители

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2 + px + q)^\gamma (x^2 + hx + r)^\nu, \text{ то}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots +$$

$$+ \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + hx + r} + \dots + \frac{M_\nu x + N_\nu}{(x^2 + hx + r)^\nu},$$

где $A_1, A_2, \dots, M_\nu, N_\nu$ – действительные числа, которые подлежат определению. Для их нахождения применяют *метод неопределенных коэффициентов*. Суть этого метода разъясим на примерах.

Рассмотрим, как интегрируются простейшие правильные дроби.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + c.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$$

($n \geq 2$ – натуральное число).

$$\text{III. } \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx.$$

При вычислении интегралов такого вида в числителе подынтегральной дроби выделяют выражение $2x + p = (x^2 + px + q)'$, а в знаменателе – полный квадрат:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p) + \left(\frac{2B}{A} - p\right)}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \left[x + \frac{p}{2} = t\right] = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}.$$

Если $k^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, (т.е. дискриминант $p^2 - 4q < 0$), то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+k^2} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + c, \quad t = x + \frac{p}{2}.$$

В случае положительного дискриминанта

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2-k^2} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + c, \quad t = x + \frac{p}{2}.$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2} \int (x^2+px+q)^{-n} d(x^2+px+q) +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n},$$

где $t = x + \frac{p}{2}$, $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $n \geq 2$ – натуральное число, и квадратный трехчлен x^2+px+q имеет комплексные корни.

Полученный интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n}$ можно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $t = k \operatorname{tg} z$ или путем повторного интегрирования по частям свести его к интегралу вида III.

В случае неправильной рациональной дроби ($n \geq m$) сначала надо выделить целую часть, деля числитель $P_n(x)$ на знаменатель $Q_m(x)$ по правилу «деления углом», т.е. представить дробь в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{P(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Таким образом, чтобы проинтегрировать любую рациональную дробь, надо уметь интегрировать многочлен и простейшие рациональные дроби.

Пример 9.44. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Решение. Выделив полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения, получим

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+9} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{3} + c.$$

Пример 9.45. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2 + 12x + 20}$.

Решение. Вынося за скобки коэффициент при x^2 и выделяя полный квадрат в знаменателе, будем иметь

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 + 12x + 20} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + \frac{20}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + \frac{8}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x+2)}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{3(x+2)}{2\sqrt{6}} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.46. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 21}$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 10x + 21} &= \int \frac{dx}{(x-5)^2 - 4} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2 - 2^2} = [x-5=t] = \int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-7}{x-3} \right| + c. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно найти и другим способом. Разложим знаменатель подынтегрального выражения на множители: $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$. Так как каждый множитель входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей типа I:

$$\frac{1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-7} = \frac{Ax - 7A + Bx - 3B}{(x-3)(x-7)} = \frac{(A+B)x + (-7A-3B)}{x^2 - 10x + 21}.$$

Следовательно,
$$\frac{1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{(A+B)x + (-7A-3B)}{x^2 - 10x + 21}.$$

Освободившись от знаменателей, получим равенство

$$1 = (A+B)x + (-7A-3B).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A и B

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -7A-3B=1, \end{cases}$$

из которой получим $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} = \int \left(-\frac{1}{4(x-3)} + \frac{1}{4(x-7)} \right) dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-7} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln |x-7| - \frac{1}{4} \ln |x-3| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-7}{x-3} \right| + c.$$

Пример 9.47. Найти интеграл $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$.

Решение. Так как $(x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5$, то

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-5x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-5)-3}{x^2-5x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-5)}{x^2-5x+6} dx -$$

$$- \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} - \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2-5x+6| -$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} \right| + c = \frac{1}{2} \ln |x^2-5x+6| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln |(x-2)(x-3)| - \ln \left| \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^3 \right| \right) + c = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^4}{(x-3)^2} + c = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-3|} + c.$$

Пример 9.48. Найти интеграл $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx$.

Решение. Находим

$$\int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx = \int \frac{(2x+1)+8}{x^2+x+2} dx = \int \frac{(2x+1)}{x^2+x+2} dx + 8 \int \frac{dx}{x^2+x+2} = \int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} +$$

$$+ 8 \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \ln |x^2+x+2| + \frac{16}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + c.$$

Пример 9.49. Найти интеграл $\int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2} dx &= 7 \int \frac{x - \frac{5}{7}}{((x-1)^2 + 8)^2} = [x-1=t, \quad x=t+1, \quad dx=dt] = \\ &= 7 \int \frac{t + \frac{2}{7}}{(t^2+8)^2} dt = 7 \int \frac{t dt}{(t^2+8)^2} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = \frac{7}{2} \int \frac{d(t^2+8)}{(t^2+8)^2} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = \\ &= \frac{7}{2} \frac{(t^2+8)^{-1}}{-1} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+8)^2} = -\frac{7}{2(t^2+8)} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+8)^2}. \end{aligned}$$

Представив числитель последнего интеграла в виде $\frac{1}{8}((t^2+8)-t^2)$ и почленно разделив его на знаменатель, получим два интеграла. Ко второму применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+8)^2} &= \frac{1}{8} \int \frac{(t^2+8)-t^2}{(t^2+8)^2} dt = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2+8} - \frac{1}{8} \int \frac{t^2}{(t^2+8)^2} dt = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2+(2\sqrt{2})^2} - \\ &- \frac{1}{8} \int \frac{t^2}{(t^2+8)^2} dt = \left[u=t, \quad dv = \frac{t dt}{(t^2+8)^2}, \quad du=dt, \quad v = \int \frac{t}{(t^2+8)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+8)}{(t^2+8)^2} = \right. \\ &= \left. \frac{1}{2} \frac{(t^2+8)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(t^2+8)} \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{8} \left(\frac{-t}{2(t^2+8)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+8} \right) = \\ &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{16(t^2+8)} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} + c = \\ &= \frac{1}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{16(t^2+8)} + c. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-5}{(x^2-2x+9)^2} dx &= -\frac{7}{2(t^2+8)} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{8(t^2+8)} + c = \\ &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2\sqrt{2}} + \frac{t-28}{8(t^2+8)} + c = \frac{1}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2\sqrt{2}} + \frac{x-29}{8(x^2-2x+9)} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.50. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3+27}$.

Решение. Разложим на множители знаменатель подынтегрального выражения: $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$ и представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + 27} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 3x + 9}.$$

Освобождаемся от знаменателей:

$$1 = A(x^2 - 3x + 9) + (Bx + C)(x + 3).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + 3B + C = 0 \\ 9A + 3C = 1, \end{cases}$$

из которой $A = \frac{1}{27}$, $B = -\frac{1}{27}$, $C = \frac{2}{9}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 27} &= \frac{1}{27} \int \frac{dx}{x + 3} - \frac{1}{27} \int \frac{x - 6}{x^2 - 3x + 9} dx = \frac{1}{27} \ln |x + 3| - \frac{1}{54} \int \frac{(2x - 3) - 9}{x^2 - 3x + 9} dx = \\ &= \frac{1}{27} \ln |x + 3| - \frac{1}{54} \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 9} dx + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 9} = \frac{1}{27} \ln |x + 3| - \\ &- \frac{1}{54} \int \frac{d(x^2 - 3x + 9)}{x^2 - 3x + 9} + \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{27} \ln |x + 3| - \frac{1}{54} \ln |x^2 - 3x + 9| + \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{3\sqrt{3}} + c = \frac{1}{27} \ln \left| \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 9}} \right| + \frac{1}{9\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{3\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.51. Найти интеграл $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} dx$.

Решение. Разложим рациональную дробь на простейшие множители

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$3x^2 + 2x + 1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 1)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$3x^2 + 2x + 1 = (A + C)x^3 + (A + B + 2C + D)x^2 + (A + C + 2D)x + (A + B + D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений: $A + C = 0$, $A + B + 2C + D = 3$, $A + C + 2D = 2$, $A + B + D = 1$.

Решения системы: $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx &= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = -\ln|x+1| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \\ &+ \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x = -\ln|x+1| - \\ &- \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.52. Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.

Решение. Выделим целую часть исходной неправильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель «углом»:

$$\begin{array}{r} x^5 \quad + 2x^3 \quad + 4x + 4 \\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 \quad \overline{) \quad} \\ \underline{-x^5 + 2x^4 + 2x^3} \quad \quad \quad \\ \quad -2x^4 \quad + 4x + 4 \\ \quad \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \quad \quad \quad \\ \quad \quad 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx &= \int \left(x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \right) dx = \int x dx - 2 \int dx + \\ &+ 4 \int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 4 \int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} dx. \end{aligned}$$

Разложим дробь в последнем интеграле на простейшие рациональные дроби: $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$.

С помощью метода неопределенных коэффициентов получим систему

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B + D = 1 \\ 2A + 2B = 1 \\ 2B = 1, \end{cases}$$

из которой $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $D = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 - 2x + 2 \int \frac{dx}{x^2} + 4 \int \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x - \frac{2}{x} + \\ &+ 2 \int \frac{(2x + 2) - 1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x - \frac{2}{x} + 2 \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x+1) + c. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

$$9.377. \int \frac{dx}{x+7}.$$

$$9.379. \int \frac{3}{1-2x} dx.$$

$$9.381. \int \frac{dx}{x^2+121}.$$

$$9.383. \int \frac{dx}{27-3x^2}.$$

$$9.385. \int \frac{dx}{2x^2-19}.$$

$$9.387. \int \frac{dx}{2x^2+8x}.$$

$$9.389. \int \frac{dx}{(x+2)^2}.$$

$$9.391. \int \frac{dx}{1-2x-x^2}.$$

$$9.393. \int \frac{dx}{3x^2+8x-2}.$$

$$9.395. \int \frac{dx}{x^2+4x-8}.$$

$$9.397. \int \frac{dx}{12x^2-4x-1}.$$

$$9.399. \int \frac{dx}{3x^2+7x+2}.$$

$$9.401. \int \frac{dx}{6x-x^2-18}.$$

$$9.403. \int \frac{dx}{2x^2-3x+4}.$$

$$9.405. \int \frac{2x+7}{2-x-x^2} dx.$$

$$9.407. \int \frac{x+1}{x^2+4x-8} dx.$$

$$9.409. \int \frac{x-7}{2x^2-8x+1} dx.$$

$$9.378. \int \frac{dx}{3-x}.$$

$$9.380. \int \frac{5}{2x+3} dx.$$

$$9.382. \int \frac{dx}{2x^2-32}.$$

$$9.384. \int \frac{dx}{3x^2+11}.$$

$$9.386. \int \frac{dx}{x^2-3x}.$$

$$9.388. \int \frac{dx}{x^2+7x}.$$

$$9.390. \int \frac{dx}{(x-5)^2}.$$

$$9.392. \int \frac{dx}{x^2-x-6}.$$

$$9.394. \int \frac{dx}{x^2-8x-9}.$$

$$9.396. \int \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$9.398. \int \frac{dx}{3+2x-x^2}.$$

$$9.400. \int \frac{dx}{35+3x-2x^2}.$$

$$9.402. \int \frac{dx}{5x-4x^2-2}.$$

$$9.404. \int \frac{dx}{x^2-x+1,5}.$$

$$9.406. \int \frac{1-x}{x^2-x-1} dx.$$

$$9.408. \int \frac{x+2}{x^2+6x} dx.$$

$$9.410. \int \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx.$$

$$9.411. \int \frac{x+2}{3x-x^2} dx.$$

$$9.413. \int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx.$$

$$9.415. \int \frac{2,5x+1}{x^2+2x+10} dx.$$

$$9.417. \int \frac{x+6}{x^2+2x+5} dx.$$

$$9.419. \int \frac{2-x}{x^2-4x+7} dx.$$

$$9.421. \int \frac{1-3x}{x^2-4x+8} dx.$$

$$9.423. \int \frac{2-1,5x}{x^2+8x+15} dx.$$

$$9.425. \int \frac{5x}{2x^2+2x+5} dx.$$

$$9.427. \int \frac{dx}{x^3+125}.$$

$$9.429. \int \frac{dx}{x^3+4x}.$$

$$9.431. \int \frac{dx}{3x+7x^2-6x^3}.$$

$$9.433. \int \frac{dx}{x^3+2x^2+x-4}.$$

$$9.435. \int \frac{dx}{2x^3-8x^2+10x-4}.$$

$$9.437. \int \frac{dx}{1-x^4}.$$

$$9.439. \int \frac{dx}{x^4-2x^2-3}.$$

$$9.441. \int \frac{dx}{(x^2+2)(3-x^2)}.$$

$$9.443. \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

$$9.445. \int \frac{dx}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}.$$

$$9.412. \int \frac{1-2x}{(x-2)(1-x)} dx.$$

$$9.414. \int \frac{x+5}{x^2-2x-8} dx.$$

$$9.416. \int \frac{x+5}{2x^2+2x+3} dx.$$

$$9.418. \int \frac{x-1}{x^2+x+6} dx.$$

$$9.420. \int \frac{x+2}{3x^2+2x+5} dx.$$

$$9.422. \int \frac{x-0,6}{x^2-0,2x+0,17} dx.$$

$$9.424. \int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx.$$

$$9.426. \int \frac{x+0,6}{x^2+10x+29} dx.$$

$$9.428. \int \frac{dx}{x^3-64}.$$

$$9.430. \int \frac{dx}{x^3-6x^2+12x-8}.$$

$$9.432. \int \frac{dx}{x^3+x^2+3x+3}.$$

$$9.434. \int \frac{dx}{x^3-3x+2}.$$

$$9.436. \int \frac{dx}{(2x+3)^3}.$$

$$9.438. \int \frac{dx}{x^4+2x^2}.$$

$$9.440. \int \frac{dx}{(2x^2-4x)^2}.$$

$$9.442. \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+8)}.$$

$$9.444. \int \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

$$9.446. \int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2} dx.$$

$$9.447. \int \frac{0,5x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$9.449. \int \frac{x + 1,5}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx.$$

$$9.451. \int \frac{dx}{x^2 - x^5}.$$

$$9.453. \int \frac{dx}{(x^2 + 6)^3}.$$

$$9.455. \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 10)^3}.$$

$$9.457. \int \frac{x + 2}{12 - 19x + 8x^2 - x^3} dx.$$

$$9.459. \int \frac{7x - 15}{2x^3 - 4x^2 + 10x} dx.$$

$$9.461. \int \frac{x + 7}{x^3 + 49x} dx.$$

$$9.463. \int \frac{x - 2}{x^3 - 3x^2} dx.$$

$$9.465. \int \frac{x}{x^4 + x^2 + 5} dx.$$

$$9.467. \int \frac{11x - 9}{(x + 1)(x + 3)^2} dx.$$

$$9.469. \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$9.471. \int \frac{3x + 4}{x^4 + 2x^3} dx.$$

$$9.473. \int \frac{x + 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} dx.$$

$$9.475. \int \frac{x}{2x^4 + 12x^2 + 10} dx.$$

$$9.477. \int \frac{x}{1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5} dx.$$

$$9.478. \int \frac{x}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx.$$

$$9.479. \int \frac{x^2}{2 - 2x^4} dx.$$

$$9.448. \int \frac{9x + 6}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx.$$

$$9.450. \int \frac{4,5x + 3}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx.$$

$$9.452. \int \frac{dx}{3x^3(1 - x)^2}.$$

$$9.454. \int \frac{dx}{(x^2 + 5)^3}.$$

$$9.456. \int \frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx.$$

$$9.458. \int \frac{4 - x}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx.$$

$$9.460. \int \frac{x - 6}{x^3 + 36x} dx.$$

$$9.462. \int \frac{3 - x}{x^3 + 9x} dx.$$

$$9.464. \int \frac{x + 1}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$$

$$9.466. \int \frac{3x - 7}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx.$$

$$9.468. \int \frac{2x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx.$$

$$9.470. \int \frac{3x - 2}{x^4 - x^3} dx.$$

$$9.472. \int \frac{3x}{x^4 + 7x^2 + 12} dx.$$

$$9.474. \int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$9.476. \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

$$9.480. \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x - x^3} dx.$$

$$9.481. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$9.483. \int \frac{1 - 2x - 3x^2}{x^3 - 3x + 2} dx.$$

$$9.485. \int \frac{x^2 + 0,5x + 2}{(x+1)(x^2 + 4)} dx.$$

$$9.487. \int \frac{91 - 41x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12} dx.$$

$$9.489. \int \frac{x^2}{(x^2 + 8x + 16)(0,5x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$9.491. \int \frac{x^2 - x + 14}{x^4 - 14x^3 + 72x^2 - 160x + 128} dx.$$

$$9.493. \int \frac{19x^2 + 16x + 16}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

$$9.495. \int \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

$$9.497. \int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx.$$

$$9.499. \int \frac{x^3 + 3}{(2x + 2)(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$9.501. \int \frac{6 - 13x + 6x^2 - x^3}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$9.503. \int \frac{x^4 + 1}{1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5} dx.$$

$$9.505. \int \frac{3x^4 + 4}{2x^2(x^2 + 1)^3} dx.$$

$$9.482. \int \frac{x^2 - 0,5}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$9.484. \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} dx.$$

$$9.486. \int \frac{x^2 + 0,5x + 1,5}{(x+2)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$9.488. \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(4-x)(x^2 - 3x + 2)} dx.$$

$$9.490. \int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

$$9.492. \int \frac{x^2}{(1-x)^5} dx.$$

$$9.494. \int \frac{x^2}{x^6 + 2x^3 + 3} dx.$$

$$9.496. \int \frac{6 - x^3}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx.$$

$$9.498. \int \frac{3x^3 - x^2 - 4x + 13}{13x^2 - 4x^3 + x^4} dx.$$

$$9.500. \int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2)} dx.$$

$$9.502. \int \frac{3x^3 - 6x^2 - 17}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} dx.$$

$$9.504. \int \frac{2x^4 + 8x^2 + 17}{(2x-3)(x^2 + x + 1)} dx.$$

Найти интеграл, выделив предварительно целое выражение в подынтегральной неправильной дроби.

$$9.506. \int \frac{4 - 3x}{2x - 3} dx.$$

$$9.508. \int \frac{x^2 + 1}{x - 3} dx.$$

$$9.510. \int \frac{x^2 - 7}{x + 5} dx.$$

$$9.507. \int \frac{x^2}{1 + x} dx.$$

$$9.509. \int \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 4} dx.$$

$$9.511. \int \frac{x^2 - 6x + 11}{x - 5} dx.$$

$$9.512. \int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$9.514. \int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 10} dx.$$

$$9.516. \int \frac{2x^3 + 5}{x + 1} dx.$$

$$9.518. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx.$$

$$9.520. \int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$9.522. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x - x^2} dx.$$

$$9.524. \int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 2}{x^3 + x} dx.$$

$$9.526. \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx.$$

$$9.528. \int \frac{x^4 + 7}{x^2 + 1} dx.$$

$$9.530. \int \frac{x^4}{x^4 - 81} dx.$$

$$9.532. \int \frac{x^5 + x^4 + 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$9.513. \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 4} dx.$$

$$9.515. \int \frac{x^3}{x - 1} dx.$$

$$9.517. \int \frac{x^3}{1 - x^2} dx.$$

$$9.519. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

$$9.521. \int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x - 3} dx.$$

$$9.523. \int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$9.525. \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - x^2} dx.$$

$$9.527. \int \frac{x^4}{x^2 + 4} dx.$$

$$9.529. \int \frac{x^4 + x^3 + 2x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

$$9.531. \int \frac{x^5 - 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx.$$

$$9.533. \int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 16} dx.$$

9.5. Интегрирование тригонометрических функций

Обозначим через $R(\sin x, \cos x)$ рациональную функцию от $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \tan \frac{x}{2}$. В результате этой подстановки имеем

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Заметим, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям, поэтому применяется только тогда, когда нельзя применить другие подстановки, вид которых зависит от свойств функции $R(\sin x, \cos x)$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \operatorname{tg} x$ преобразует исходный интеграл в интеграл от рациональной функции аргумента t . При этом используются формулы $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \sin x$ рационализирует интеграл.

Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ рационализируются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$, а интегралы вида $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$ – с помощью подстановки $t = \operatorname{ctg} x$.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ находят с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

При нахождении интегралов вида $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$, где $a \neq b$, применяются тригонометрические формулы

$$\begin{aligned}\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]; \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]; \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].\end{aligned}$$

Если $a = b$, то

$$\begin{aligned}\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin 2ax \, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + c; \\ \int \cos^2 ax \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2ax}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + c; \\ \int \sin^2 ax \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2ax}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + c.\end{aligned}$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, где $m, n \in \mathbb{N}$, вычисляются с помощью подстановки $t = \sin x$ при нечетном n , а при нечетном m – с помощью подстановки $t = \cos x$. В случаях четных m и n используются тригонометрические формулы

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Интегралы вида

$$\int tg^n x dx, \quad \int ctg^n x dx, \quad \int \frac{tg^n x}{\cos^{2m} x} dx, \quad \int \frac{ctg^n x}{\sin^{2m} x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^{2k} x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^{2l} x},$$

где $n, m, k, l \in \mathbb{N}$, находят с помощью формул

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Пример 9.53. Найти интеграл $\int \frac{dx}{13 - 5 \cos x}$.

Решение. Так как функция $\frac{1}{13 - 5 \cos x}$ не является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, нечетной относительно $\sin x$ и $\cos x$, то применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = tg \frac{x}{2}$. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{13 - 5 \cos x} &= \left[t = tg \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctg t, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \right] = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(1 + t^2) \left(13 - 5 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{18t^2 + 8} = \int \frac{dt}{(3t)^2 + 2^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + 2^2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{3t}{2} + c = \frac{1}{6} \arctg \left(\frac{3}{2} tg \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

Пример 9.54. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2 \sin x + 5 \cos x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$; применим подстановку $t = tg \frac{x}{2}$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$,

$$\begin{aligned} dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{2 \sin x + 5 \cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + 5 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 5} = \\ &= \int \frac{dt}{2t + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t + 5)}{2t + 5} = \frac{1}{2} \ln |2t + 5| + c = \frac{1}{2} \ln \left| 2tg \frac{x}{2} + 5 \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.55. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2\cos^2 x - 3\sin^2 x}$.

Решение. Так как подынтегральная функция – четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\cos^2 x - 3\sin^2 x} &= \left[t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2} - \frac{3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2-3t^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}t)}{(\sqrt{3}t)^2 - (\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}t - \sqrt{2}}{\sqrt{3}t + \sqrt{2}} \right| + c = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + \sqrt{2}} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.56. Найти интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx$.

Решение. Применим подстановку $t = \sin x$, так как подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$, и получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^8 x} dx = \left[t = \sin x, dt = \cos x dx, \cos^2 x = 1 - t^2 \right] = \\ &= \int \frac{(1-t^2)dt}{t^8} = \int t^{-8} dt - \int t^{-6} dt = -\frac{1}{7t^7} + \frac{1}{5t^5} + c = -\frac{1}{7\sin^7 x} + \frac{1}{5\sin^5 x} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.57. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + \cos x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, поэтому применим подстановку $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + \cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x + \cos x} dx = \left[t = \cos x, dt = -\sin x dx, \sin^2 x = 1 - t^2 \right] = \\ &= -\int \frac{(1-t^2)dt}{t^2 + t} = \int \frac{(t^2 - 1)dt}{t(t+1)} = \int \frac{(t-1)dt}{t} = \int dt - \int \frac{dt}{t} = \\ &= t - \ln |t| + c = \cos x - \ln |\cos x| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.58. Найти интеграл $\int \frac{3-2\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

Решение. Так как $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{3-2\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \left[t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{(3-2t)dt}{(1+t^2)\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{(3-2t)dt}{2t} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} - \int dt = \frac{3}{2} \ln |t| - t + c = \frac{3}{2} \ln |tgx| - tgx + c.$$

Пример 9.59. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \left[t = tg \frac{x}{2}, x = 2 \arctg t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right] = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int t^{-3} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4} \int t dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} \ln |t| + \\ &+ \frac{1}{8} t^2 + c = -\frac{1}{8tg^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} tg^2 \frac{x}{2} + c = \frac{1 - \cos x}{8(1 + \cos x)} - \frac{1 + \cos x}{8(1 - \cos x)} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + c = \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.60. Найти интеграл $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(-2x) + \sin 3x) dx = \frac{1}{-4} \int (\sin(-2x) d(-2x) + \\ &+ \sin 3x d(3x)) = \frac{1}{4} \cos(-2x) - \frac{1}{6} \cos 3x + c = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{6} \cos 3x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.61. Найти интеграл $\int \cos 9x \cos 6x \cos 3x dx$.

Решение. Так как $\cos 9x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 15x)$, то

$$\begin{aligned} \int \cos 9x \cos 6x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos^2 3x dx + \frac{1}{2} \int \cos 15x \cos 3x dx = \\ &= \left[\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} \right] = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 6x) dx + \frac{1}{4} \int (\cos 12x + \cos 18x) dx = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{48} \sin 12x + \frac{1}{72} \sin 18x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.62. Найти интеграл $\int (\sin x - \sin 7x)^2 dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int (\sin x - \sin 7x)^2 dx &= \int \sin^2 x dx - 2 \int \sin x \sin 7x dx + \int \sin^2 7x dx = \\&= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx - \int (\cos 6x - \cos 8x) dx + \frac{1}{2} \int (1 - \cos 14x) dx = \\&= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{28} \sin 14x + c = \\&= x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 8x - \frac{1}{28} \sin 14x + c.\end{aligned}$$

Пример 9.63. Найти интеграл $\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^4 \frac{x}{3} dx$.

Решение. Так как $\sin \frac{x}{3}$ и $\cos \frac{x}{3}$ входят в подынтегральное выражение в четных степенях, то воспользуемся формулами

$$\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{2x}{3}, \quad \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4x}{3} \right), \quad \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2x}{3} \right)$$

и будем иметь

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^4 \frac{x}{3} dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 \frac{2x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} dx = \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos \frac{4x}{3} \right) \left(1 + \cos \frac{2x}{3} \right) dx = \\&= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos \frac{4x}{3} dx + \frac{1}{16} \int \cos \frac{2x}{3} dx - \frac{1}{16} \int \cos \frac{4x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx = \\&= \frac{1}{16} x - \frac{3}{64} \sin \frac{4x}{3} + \frac{3}{32} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{32} \int \left(\cos \frac{2x}{3} + \cos 2x \right) dx = \frac{1}{16} x - \frac{3}{64} \sin \frac{4x}{3} + \\&+ \frac{3}{32} \sin \frac{2x}{3} - \frac{3}{64} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{64} \sin 2x + c = \frac{1}{16} x - \frac{3}{64} \sin \frac{4x}{3} + \frac{3}{64} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{64} \sin 2x + c.\end{aligned}$$

Пример 9.64. Найти интеграл $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Решение. Так как степень $\cos x$ нечетная, то применим подстановку $t = \sin x$, из которой $dt = \cos x dx$. Таким образом получаем

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^4 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2) dt = \int t^4 dt - \int t^6 dt = \\&= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + c = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + c.\end{aligned}$$

Пример 9.65. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x dx}{2 - \cos x}$.

Решение. В подынтегральное выражение $\sin x$ входит в нечетной степени, поэтому применим подстановку $t = \cos x$ и получим

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{2 - \cos x} = [t = \cos x, dt = -\sin x dx] = -\int \frac{t^2 - 1}{t - 2} dt.$$

В полученном интеграле выделим целую часть в подынтегральной дроби:

$$-\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t} = \frac{t - 2}{t + 2} - \frac{2t - 1}{2t - 4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -\int \frac{t^2 - 1}{t - 2} dt &= -\int \left(t + 2 + \frac{3}{t - 2} \right) dt = -\frac{1}{2}t^2 - 2t - 3 \ln |t - 2| + c = \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x - 3 \ln |\cos x - 2| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.66. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^6(2x - 3)}$.

Решение. Так как $\frac{1}{\operatorname{tg}^6(2x - 3)} = \operatorname{ctg}^6(2x - 3)$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^6(2x - 3)} &= \int \operatorname{ctg}^6(2x - 3) dx = \int \operatorname{ctg}^4(2x - 3) \left(\frac{1}{\sin^2(2x - 3)} - 1 \right) dx = \\ &= [t = 2x - 3, dt = 2dx] = \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^4 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg} t) - \\ &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^4 t dt = -\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 t - \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 t + \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^2 t d(\operatorname{ctg} t) + \\ &+ \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^2 t dt = -\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 t + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 t + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} t - \\ &= -\frac{1}{2} t + c = -\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5(2x - 3) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3(2x - 3) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(2x - 3) - x + c. \end{aligned}$$

Пример 9.67. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{tg}^4 2x}{\cos^6 2x} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 2x$ и применим формулу

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\int \frac{tg^4 2x}{\cos^6 2x} dx &= \frac{1}{2} \int tg^4 t \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^2 \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2} \int tg^4 t (1 + tg^2 t)^2 d(tg t) = \\ &= \frac{1}{2} \int (tg^8 t + 2tg^6 t + tg^4 t) d(tg t) = \frac{1}{18} tg^9 2x + \frac{1}{7} tg^7 2x + \frac{1}{10} tg^5 2x + c.\end{aligned}$$

Пример 9.68. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^8 3x}$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^8 3x} &= \left[t = 3x, \quad dx = \frac{1}{3} dt, \quad \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + tg^2 t \right] = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^3 \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \frac{1}{3} \int (1 + tg^2 t)^3 d(tg t) = \frac{1}{3} \int (1 + 3tg^2 t + 3tg^4 t + tg^6 t) dt = \\ &= \frac{1}{3} t + \frac{1}{3} tg^3 t + \frac{1}{5} tg^5 t + \frac{1}{21} tg^7 t + c = x + \frac{1}{3} tg^3 3x + \frac{1}{5} tg^5 3x + \frac{1}{21} tg^7 3x + c.\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

9.534. $\int \frac{dx}{17 + 15 \cos x}$.

9.535. $\int \frac{dx}{5 - \cos x}$.

9.536. $\int \frac{dx}{9 + 5 \cos x}$.

9.537. $\int \frac{dx}{11 + \cos 2x}$.

9.538. $\int \frac{dx}{2 - 3 \sin x}$.

9.539. $\int \frac{dx}{4 + 7 \sin x}$.

9.540. $\int \frac{dx}{6 - 5 \sin x}$.

9.541. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

9.542. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

9.543. $\int \frac{dx}{2 - 3 \sin x + 2 \cos x}$.

9.544. $\int \frac{dx}{5 - 3 \sin x - 4 \cos x}$.

9.545. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 7 \cos x}$.

9.546. $\int \frac{dx}{6 - \sin x + 2 \cos x}$.

9.547. $\int \frac{dx}{4 + 7 \sin x + 4 \cos x}$.

9.548. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + 8 \cos x}$.

9.549. $\int \frac{dx}{4 + 3 \sin x + \sqrt{7} \cos x}$.

$$9.550. \int \frac{dx}{8 + 2\sin x + 3\cos x}.$$

$$9.552. \int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}.$$

$$9.554. \int \frac{dx}{7 - 5\sin x + 6\cos x}.$$

$$9.556. \int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}.$$

$$9.558. \int \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x} dx.$$

$$9.560. \int \frac{\cos 5x}{(1 - \cos 5x)^2} dx.$$

$$9.562. \int \frac{dx}{3\cos^2 2x + 4\sin^2 2x}.$$

$$9.564. \int \frac{dx}{1 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x}.$$

$$9.566. \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$9.568. \int \frac{dx}{\cos^4 5x \sin^2 5x}.$$

$$9.570. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

$$9.572. \int \frac{dx}{\sqrt{3\sin x \cos^7 x}}.$$

$$9.574. \int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 3\cos^2 x}.$$

$$9.575. \int \frac{dx}{(\sin 2x + \cos 2x)^2}.$$

$$9.577. \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^4 x - \cos^2 x + 1} dx.$$

$$9.579. \int \frac{\cos^5 3x}{\sin^3 3x} dx.$$

$$9.551. \int \frac{dx}{2 - \sqrt{3}\sin x + \cos x}.$$

$$9.553. \int \frac{dx}{5 - 4\sin x - 3\cos x}.$$

$$9.555. \int \frac{dx}{5 + 3\sin x + 2\cos x}.$$

$$9.557. \int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx.$$

$$9.559. \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin 2x} dx.$$

$$9.561. \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 1}.$$

$$9.563. \int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} dx.$$

$$9.565. \int \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x + 4\sin 2x \cos 2x} dx.$$

$$9.567. \int \sin^4 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx.$$

$$9.569. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}.$$

$$9.571. \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}} dx.$$

$$9.573. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 \frac{x}{4} \cos^5 \frac{x}{4}}}.$$

$$9.576. \int \cos^3(x+1) dx.$$

$$9.578. \int \cos^3(2x-3) dx.$$

$$9.580. \int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{3\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}} dx.$$

$$9.581. \int \frac{dx}{\sin 2x \sin 4x}.$$

$$9.583. \int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin^2 x)}.$$

$$9.585. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}.$$

$$9.587. \int \cos^5 \frac{x}{2} dx.$$

$$9.589. \int \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$9.591. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx.$$

$$9.593. \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$$

$$9.595. \int \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\cos^9 \frac{x}{2}} dx.$$

$$9.597. \int \operatorname{ctg}^2 2x \frac{1}{\sin 2x} dx.$$

$$9.599. \int \operatorname{ctg}^3 x \frac{1}{\sin^6 x} dx.$$

$$9.601. \int \left(\operatorname{tg}^4 2x + \frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx.$$

$$9.603. \int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} dx.$$

$$9.605. \int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}.$$

$$9.607. \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{3}}.$$

$$9.582. \int \frac{\cos^5 \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}} dx.$$

$$9.584. \int \frac{\cos^5 x}{1 - \cos^2 x} dx.$$

$$9.586. \int \cos^3 x dx.$$

$$9.588. \int \cos^7 4x dx.$$

$$9.590. \int \frac{\cos^3 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}} dx.$$

$$9.592. \int \frac{\sin 3x}{\cos^5 3x} dx.$$

$$9.594. \int \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 2x} dx.$$

$$9.596. \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx.$$

$$9.598. \int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx.$$

$$9.600. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx.$$

$$9.602. \int \frac{dx}{1 - \cos^2 x - 2,5 \sin 2x}.$$

$$9.604. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$9.606. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

$$9.608. \int \frac{dx}{\sin^5 2x}.$$

$$9.609. \int \frac{dx}{\sin^7 x}.$$

$$9.611. \int \frac{dx}{\cos^3 \frac{x}{4}}.$$

$$9.613. \int \sin 2x \cos 7x dx.$$

$$9.615. \int \sin 3x \cos 8x dx.$$

$$9.617. \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$9.619. \int \sin 3x \sin 7x dx.$$

$$9.621. \int \sin 3x \sin \left(3x + \frac{\pi}{5} \right) dx.$$

$$9.623. \int \sin \left(6x - \frac{\pi}{5} \right) \sin \left(6x + \frac{3\pi}{10} \right) dx.$$

$$9.625. \int \cos x \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

$$9.627. \int \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{5} dx.$$

$$9.629. \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx.$$

$$9.631. \int \cos \left(x - \frac{\pi}{10} \right) \cos \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{5} \right) dx.$$

$$9.633. \int \sin^2 \frac{x}{5} dx.$$

$$9.635. \int \cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) dx.$$

$$9.637. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$9.639. \int \sin^4 3x dx.$$

$$9.641. \int \cos^2 3x \sin^2 5x dx.$$

$$9.643. \int \cos^6 \frac{x}{4} dx.$$

$$9.645. \int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$9.610. \int \frac{dx}{\cos 2x}.$$

$$9.612. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx.$$

$$9.614. \int \sin \frac{x}{2} \cos 3x dx.$$

$$9.616. \int \sin(6x + 5) \cos 4x dx.$$

$$9.618. \int \sin 2x \sin 8x dx.$$

$$9.620. \int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{4x}{3} dx.$$

$$9.622. \int \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(4x + \frac{\pi}{12} \right) dx.$$

$$9.624. \int \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx.$$

$$9.626. \int \cos 3x \cos 10x dx.$$

$$9.628. \int \cos 2x \cos 6x dx.$$

$$9.630. \int \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx.$$

$$9.632. \int \cos(6x + 1) \cos(2x + 2) dx.$$

$$9.634. \int \sin^2 8x dx.$$

$$9.636. \int \cos^2 \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) dx.$$

$$9.638. \int \sin^2 \frac{x}{8} \cos^4 \frac{x}{8} dx.$$

$$9.640. \int \cos^4 2x dx.$$

$$9.642. \int \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$9.644. \int \sin^8 x dx.$$

$$9.646. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx.$$

$$9.647. \int \sqrt[5]{\sin^3 \frac{x}{3}} \cos^5 \frac{x}{3} dx.$$

$$9.649. \int \sin^4 \frac{x}{5} \cos^3 \frac{x}{5} dx.$$

$$9.651. \int \sin^5 x \cos^5 x dx.$$

$$9.653. \int \sin^3 x dx.$$

$$9.655. \int \frac{\sin^3 2x}{\cos 2x \sqrt[3]{\cos 2x}} dx.$$

$$9.657. \int \cos \frac{x}{2} \sin^5 \frac{x}{2} dx.$$

$$9.659. \int tg^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

$$9.661. \int ctg^3 5x dx.$$

$$9.663. \int ctg^6 x dx.$$

$$9.665. \int \frac{dx}{tg^8 2x}.$$

$$9.667. \int \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\cos^8 \frac{x}{2}} dx.$$

$$9.669. \int \frac{dx}{\sin^4 5x}.$$

$$9.671. \int \frac{dx}{\cos^6 \frac{x}{2}}.$$

$$9.673. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1} dx.$$

$$9.675. \int (1 + 2 \cos 3x)^3 dx.$$

$$9.677. \int \frac{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2}{\sin x} dx.$$

$$9.679. \int \frac{1 + \sin 4x}{\sin^2 2x} dx.$$

$$9.648. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

$$9.650. \int \sin^4 x \cos^5 x dx.$$

$$9.652. \int \sin x \cos^4 x dx.$$

$$9.654. \int \sin^3 4x \cos^2 4x dx.$$

$$9.656. \int \frac{\sin^3 6x}{\sqrt[3]{\cos^2 6x}} dx.$$

$$9.658. \int tg^3 \pi x dx.$$

$$9.660. \int tg^3 2x dx.$$

$$9.662. \int tg^4 \frac{x}{6} dx.$$

$$9.664. \int \frac{1}{ctg^7 x} dx.$$

$$9.666. \int tg^4 x \frac{1}{\cos^6 x} dx.$$

$$9.668. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x \cos^2 x}}.$$

$$9.670. \int \frac{dx}{\cos^4 7x}.$$

$$9.672. \int \frac{dx}{\sin^6 2x}.$$

$$9.674. \int (1 + 2 \sin x)^3 dx.$$

$$9.676. \int (1 + 3 \cos x)^2 dx.$$

$$9.678. \int \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$9.680. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{25 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}} dx.$$

$$9.681. \int \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.682. \int \frac{\sin x}{\cos^3 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - 1} dx.$$

9.683. Интегрируя по частям, вывести формулы «понижения степени»:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx;$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

По этим формулам найти 1) $\int \sin^6 x dx$; 2) $\int \cos^6 x dx$.

9.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Если подынтегральная функция иррациональна, то ее с помощью замены переменной во многих случаях можно привести к рациональному виду или к табличному интегралу. Этот способ называется *интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения*.

В интегралах вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где R – рациональная функция,

n – натуральное число и a, b, c, d – постоянные, рационализация подынтегрального выражения достигается одной из трех подстановок:

1. $t = \sqrt[n]{ax+b}$, если $c = 0$;
2. $t = \sqrt[n]{x}$, если $b = c = 0$;
3. $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ в остальных случаях.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right) dx,$$

где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots, n_k, m_k$ – целые числа, преобразуются в интегралы от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($\text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k) = s$).

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx$

рационализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$.

С помощью тригонометрических подстановок $x = a \sin t$, $x = \frac{a}{\cos t}$,

$x = a \operatorname{tg} t$ к рациональному тригонометрическому виду приводятся соответственно интегралы

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx.$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ могут быть найдены с помощью таких же подстановок, так как после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и применения подстановки получают интегралы от выражений $R(t, \sqrt{a^2 - t^2})$, $R(t, \sqrt{t^2 - a^2})$, $R(t, \sqrt{t^2 + a^2})$.

Интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ находятся с помощью подстановки $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

- 1) если p – целое число, то используем подстановку $x = t^l$, где l – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m = \frac{m_1}{s_1}$ и $n = \frac{m_2}{s_2}$, т.е. $l = \text{НОК}(s_1; s_2)$;
- 2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, $p = \frac{k}{s}$, то $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p ;
- 3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, $p = \frac{k}{s}$, то $\frac{a}{x^n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p .

Пример 9.69. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 17}}$.

Решение. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ приводятся к табличным

интегралам путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена. Поэтому преобразуем квадратный трехчлен к виду

$$x^2 + 3x + 17 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{59}{4}. \quad \text{Тогда}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 17}} = \int \frac{d\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{59}}{2}\right)^2}} = \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 17} \right| + c.$$

Пример 9.70. Найти интеграл $\int \frac{7x+1}{\sqrt{2x^2+x+5}} dx$.

Решение. Для нахождения интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ в числителе выделяют производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и затем раскладывают интеграл на сумму двух интегралов, один из которых есть табличный, а другой – вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Значит, выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+1}{\sqrt{2x^2+x+5}} dx &= \int \frac{\frac{7}{4}(4x+1) - \frac{3}{4}}{\sqrt{2x^2+x+5}} dx = \frac{7}{4} \int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x+5}} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+5}} = \\ &= \frac{7}{4} \int (2x^2+x+5)^{-\frac{1}{2}} d(2x^2+x+5) - \frac{3}{4\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{39}}{4}\right)^2}} = \frac{7}{2} \sqrt{2x^2+x+5} - \\ &- \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.71. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x-3)^3} - \sqrt{2x-3}}$.

Решение. Так как НОК $(5; 2) = 10$, то применим подстановку $2x-3=t^{10}$. Тогда $x=\frac{t^{10}+3}{2}$, $dx=5t^9 dt$ и $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x-3)^3} - \sqrt{2x-3}} = 5 \int \frac{t^9 dt}{t^6 - t^5} =$

$$\begin{aligned} &= 5 \int \frac{t^4 dt}{t-1} = 5 \int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{5}{4} t^4 + \frac{5}{3} t^3 + \frac{5}{2} t^2 + 5t + 5 \ln |t-1| + c = \\ &= \frac{5}{4} (2x-3)^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{3} (2x-3)^{\frac{3}{10}} + \frac{5}{2} (2x-3)^{\frac{1}{5}} + 5(2x-3)^{\frac{1}{10}} + 5 \ln |\sqrt[10]{2x-3} - 1| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.72. Найти интеграл $\int \frac{x^2 - x + 2 \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x}}{x(1 - \sqrt[3]{x})} dx$.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной функцией от $x, x^2, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{6}}, x^{\frac{1}{3}}$, и наименьшее общее кратное знаменателей дробей равно 6. Поэтому вводим замену $x=t^6$, $dx=6t^5 dt$ и искомый интеграл приводим к виду:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x + 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x}}{x(1 - \sqrt[3]{x})} dx &= 6 \int \frac{(t^{12} - t^6 + 2t^4 - t)t^5}{t^6(1 - t^2)} dt = -6 \int \frac{t^{11} - t^5 + 2t^3 - 1}{t^2 - 1} dt = \\
&= -6 \int \left(t^9 + t^7 + t^5 + 2t + \frac{2t - 1}{t^2 - 1} \right) dt = -\frac{3}{5}t^{10} - \frac{3}{4}t^8 - t^6 - 6t^2 - 6 \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \\
&= -\frac{3}{5}t^{10} - \frac{3}{4}t^8 - t^6 - 6t^2 - 6 \ln |t^2 - 1| + 6 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + c = \\
&= -\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x - 6x^{\frac{1}{3}} - 6 \ln |\sqrt[3]{x} - 1| + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + c.
\end{aligned}$$

Пример 9.73. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x \left(3 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \right)}$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $\frac{x-1}{x} = t^3$, из которой $x = \frac{1}{1-t^3}$,

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x \left(3 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \right)} = 3 \int \frac{t^2(1-t^3)}{(1-t^3)^2(3-t)} dt = 3 \int \frac{t^2}{(1-t^3)(3-t)} dt = \\
&= 3 \int \frac{t^2}{(1-t)(3-t)(t^2+t+1)} dt.
\end{aligned}$$

Подынтегральную функцию разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(1-t)(3-t)(t^2+t+1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{3-t} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов для нахождения A, B, C, D , получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + B - C = 0 \\ 2A - 4C + D = 1 \\ 2A + 3C - 4D = 0 \\ 3A + B + 3D = 0, \end{cases}$$

из которой $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{26}, C = -\frac{7}{39}, D = -\frac{2}{39}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(1-t)(3-t)(t^2+t+1)} dt &= \frac{1}{6} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{9}{26} \int \frac{dt}{3-t} - \frac{1}{39} \int \frac{7t+2}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{6} \ln |1-t| - \\ &- \frac{9}{26} \ln |3-t| - \frac{7}{78} \int \frac{(2t+1) - \frac{3}{7}}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{6} \ln |1-t| - \frac{9}{26} \ln |3-t| - \frac{7}{78} \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \\ &+ \frac{3}{78} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6} \ln |1-t| - \frac{9}{26} \ln |3-t| - \frac{7}{78} \ln |t^2+t+1| + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{39} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\left(3 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)} &= \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \right| - \frac{27}{26} \ln \left| 3 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \right| - \frac{7}{26} \ln \left| \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1 \right| + \frac{\sqrt{3}}{13} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1 \right) \right) + c. \end{aligned}$$

Пример 9.74. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} \frac{dx}{x}$.

Р е ш е н и е. Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$. Применим подстановку $\sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} = t$, $x = \frac{3(t^2-1)}{2(t^2+1)}$, $dx = \frac{6t dt}{(t^2+1)^2}$. Тогда $\int \sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} \frac{dx}{x} =$

$$\begin{aligned} &= 4 \int \frac{t^2(t^2+1)}{(t^2+1)^2(t^2-1)} dt = 4 \int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt. \text{ Разложим рациональную дробь } \\ &\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} \text{ на простейшие: } \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Освободившись от знаменателей, будем иметь:

$t^2 = (A+B+C)t^3 + (A-B+D)t^2 + (A+B-C)t + A-B-D$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений $A+B+C=0$, $A-B+D=1$, $A+B-C=0$, $A-B-D=0$, решение которой $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4} \ln |t+1| +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c.$$

В результате

$$\int \sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} - 1}{\sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} + 1} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+2x}{3-2x}} + c.$$

Пример 9.75. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$.

Решение. В примере 9.37 мы нашли этот интеграл, используя метод интегрирования по частям. Однако его можно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $x = a \sin t$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = [x = a \sin t, \quad dx = a \cos t \, dt] = a \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cos t \, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t \, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + c =$$

$$= \left[t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \right.$$

$$\left. = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right] = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Пример 9.76. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(7+x^2)^3}}$.

Решение. Применим подстановку $x = \sqrt{7} \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{\sqrt{7} dt}{\cos^2 t}$, $\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{7}}$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(7+x^2)^3}} = \frac{1}{7} \int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \left[1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \right] = \frac{1}{7} \int \cos t \, dt = \frac{1}{7} \sin t + c =$$

$$= \left[\sin t = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \right] = \frac{x}{7\sqrt{7+x^2}} + c.$$

Пример 9.77. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 3}}$.

Решение. Сделав замену $x = \frac{\sqrt{3}}{\cos t}$, $dx = \frac{\sqrt{3} \sin t}{\cos^2 t} dt$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 3}} &= \sqrt{3} \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t \frac{3}{\cos^2 t} \sqrt{\frac{3}{\cos^2 t} - 3}} = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + c = \\ &= \left[\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} \right] = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{3x} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.78. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2 - 4x + 20} dx$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4x + 20} dx &= \int \sqrt{(x-2)^2 + 16} dx = \left[x-2 = 4 \operatorname{tg} t, dx = \frac{4 dt}{\cos^2 t} \right] = \\ &= 16 \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt}{\cos^2 t} = 16 \int \frac{dt}{\cos^3 t}. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos t$, то используя подстановку $z = \sin t$, $t = \arcsin z$, $dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, будем иметь

$$\begin{aligned} 16 \int \frac{dt}{\cos^3 t} &= 16 \int \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}} (1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = 16 \int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = 16 \int \frac{(1-z^2) + z^2}{(1-z^2)^2} dz = \\ &= -16 \int \frac{dz}{z^2 - 1} + 16 \int \frac{z^2}{(1-z^2)^2} dz = -8 \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + 16 \int \frac{z^2}{(1-z^2)^2} dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл найдем интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2}{(1-z^2)^2} dz &= \left[u = z, dv = \frac{z dz}{(1-z^2)^2}, du = dz, v = \int \frac{z}{(1-z^2)^2} dz = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \right. \\ &= \left. \frac{1}{2(1-z^2)} \right] = \frac{z}{2(1-z^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{z}{2(1-z^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4x + 20} \, dx &= -8 \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + \frac{8z}{1-z^2} + 4 \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c = \frac{8z}{1-z^2} - 4 \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c = \\ &= \frac{8 \sin t}{\cos^2 t} - 4 \ln \left| \frac{\sin t - 1}{\sin t + 1} \right| + c = \left[\cos^2 t = \frac{1}{1 + tg^2 t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{4} \right)^2} = \frac{16}{x^2 - 4x + 20}, \right. \\ \left. \sin t = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 20}} \right] &= \frac{x-2}{2} \sqrt{x^2 - 4x + 20} - 4 \ln \left| \frac{x-2 - \sqrt{x^2 - 4x + 20}}{x-2 + \sqrt{x^2 - 4x + 20}} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.79. Найти интеграл $\int \sqrt{11+10x-x^2} \, dx$.

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{11+10x-x^2} \, dx &= \int \sqrt{36 - (x-5)^2} \, dx = [x-5 = 6 \sin t, \, dx = 6 \cos t \, dt] = \\ &= \int \sqrt{36 - 36 \sin^2 t} \, 6 \cos t \, dt = 36 \int \cos^2 t \, dt = 18 \int (1 + \cos 2t) \, dt = \\ &= 18t + 9 \sin 2t + c = \left[\sin t = \frac{x-5}{6}, \, \cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{6} \right)^2} = \frac{\sqrt{11+10x-x^2}}{6}, \right. \\ \left. \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x-5}{6} \cdot \frac{\sqrt{11+10x-x^2}}{6} = \frac{x-5}{18} \sqrt{11+10x-x^2} \right] &= \\ &= 18 \arcsin \frac{x-5}{6} + \frac{x-5}{2} \sqrt{11+10x-x^2} + c. \end{aligned}$$

Пример 9.80. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Это интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} \, dx$. Поэтому сде-

лаем замену $x-3 = \frac{1}{t}$, $x = 3 + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x^2 + 2x + 5 = \frac{20t^2 + 8t + 1}{t^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+2x+5}} &= - \int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{20t^2+8t+1}}{t}} = - \frac{\sqrt{5}}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(5t+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \frac{d(5t+1)}{\sqrt{(5t+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| 5t+1 + \sqrt{(5t+1)^2 + \frac{1}{4}} \right| + c = \left[t = \frac{1}{x-3} \right] = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} + \frac{\sqrt{5(x^2+2x+5)}}{2(x-3)} \right| + c = - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+4 + \sqrt{5(x^2+2x+5)}}{2(x-3)} \right| + c. \end{aligned}$$

Пример 9.81. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Решение. Подынтегральную функцию представим в виде $x^3(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}$. В нашем случае мы имеем интеграл от дифференциального бинома, причем $m=3$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ – целое число. Поэтому делаем замену $1-4x^2=t^2$, $x^2=\frac{1-t^2}{4}$, $x dx=-\frac{1}{4}t dt$. Значит, $\int \frac{x^3}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$

$$= -\frac{1}{16} \int \frac{(1-t^2)t dt}{t^3} = -\frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \frac{1}{16t} + \frac{t}{16} + c = \frac{1}{16\sqrt{1-4x^2}} + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{16} + c.$$

Пример 9.82. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{(2+x^2)^5}}{x^4} dx$.

Решение. Запишем подынтегральную функцию в виде $x^{-4}(2+x^2)^{\frac{5}{2}}$. Здесь $m=-4$, $n=2$, $p=\frac{5}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$ – целое число. Поэтому положим $\frac{2}{x^2}+1=t^2$, $x^2=\frac{2}{t^2-1}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-1}}$, $dx=-\frac{\sqrt{2}t dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{(2+x^2)^5}}{x^4} dx &= -\sqrt{2} \int \left(\frac{2t^2}{t^2-1} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{(t^2-1)^2}{4} \cdot \frac{t dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}} = -2 \int \frac{t^6}{(t^2-1)^2} dt = \\ &= -2 \int \left(t^2 + 2 + \frac{3t^2-2}{(t^2-1)^2} \right) dt = -\frac{2}{3}t^3 - 4t - 2 \int \frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt. \end{aligned}$$

Подынтегральную функцию последнего интеграла разложим на простейшие дроби: $\frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$.

Освободившись от знаменателей, имеем

$$3t^2-2 = (A+C)t^3 + (A+B-C+D)t^2 + (-A+2B-C-2D)t - A+B+C+D.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений $A+C=0$, $A+B-C+D=3$, $-A+2B-C-2D=0$, $-A+B+C+D=-2$, из которой находим $A=\frac{5}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=-\frac{5}{4}$, $D=\frac{1}{4}$.

$$\text{Итак, } \int \frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt = \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \frac{5}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{5}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} + c = \frac{5}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{t}{2(t^2-1)} + c,$$

$$t = \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}.$$

Окончательно

$$\int \frac{\sqrt{(2+x^2)^5}}{x^4} dx = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{(2+x^2)^3}}{x^3} - \frac{4\sqrt{2+x^2}}{x} - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x^2}-x}{\sqrt{2+x^2}+x} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{2+x^2} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы.

$$9.684. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+13x+41}}.$$

$$9.686. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}.$$

$$9.688. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}.$$

$$9.690. \int \frac{3x+13}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$9.692. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)(x+4)^2}}.$$

$$9.694. \int \frac{x-1-\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$9.696. \int \frac{1-\sqrt[6]{3+x}}{3+x+\sqrt[3]{(3+x)^4}} dx.$$

$$9.698. \int \frac{\sqrt{x-7}}{1+\sqrt[4]{(x-7)^3}} dx.$$

$$9.700. \int \frac{\sqrt[6]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}} dx.$$

$$9.702. \int \sqrt[3]{\frac{x+7}{x+5}} \frac{dx}{(x+5)^3}.$$

$$9.704. \int \frac{\sqrt{x-3}+2}{(x-3)^2-\sqrt{x-3}} dx.$$

$$9.685. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}.$$

$$9.687. \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2-2x}}.$$

$$9.689. \int \frac{5x+2}{\sqrt{2x^2+12x+11}} dx.$$

$$9.691. \int \frac{3x-2}{\sqrt{-x^2+10x-24}} dx;$$

$$9.693. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}}.$$

$$9.695. \int \frac{\sqrt[3]{2x-5}}{1+\sqrt[3]{2x-5}} dx.$$

$$9.697. \int \frac{x^2-4x+\sqrt{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

$$9.699. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$9.701. \int \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} dx.$$

$$9.703. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (1+\sqrt[3]{x})^3}.$$

$$9.705. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-5)^2-\sqrt{2x-5}}}.$$

$$9.706. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7+2x} - \sqrt{7+2x}}.$$

$$9.708. \int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{6x+1}} dx.$$

$$9.710. \int \frac{x-4}{\sqrt[3]{3x-14}} dx.$$

$$9.712. \int \frac{x^3}{1 + \sqrt[3]{x^4+1}} dx.$$

$$9.714. \int x\sqrt{a-x} dx.$$

$$9.716. \int \sqrt{2-x^2} dx.$$

$$9.718. \int \sqrt{5-2x-x^2} dx.$$

$$9.720. \int (x-1)^2 \sqrt{3+2x-x^2} dx.$$

$$9.722. \int (x-1)^3 \sqrt{(x^2-2x-1)^3} dx.$$

$$9.724. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+13)^3}}.$$

$$9.726. \int \frac{dx}{(x^2+6x+11)\sqrt{-x^2-6x-8}}.$$

$$9.728. \int \frac{x^2}{\sqrt{(6+x^2)^5}} dx.$$

$$9.730. \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{(1-2x-x^2)^3}} dx.$$

$$9.732. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$$

$$9.734. \int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x-2)^2} dx.$$

$$9.736. \int \frac{\sqrt{(8-2x-x^2)^3}}{(x+1)^6} dx.$$

$$9.738. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2+1}}.$$

$$9.740. \int \frac{dx}{x \sqrt{3x-x^2}}.$$

$$9.707. \int \frac{dx}{\sqrt{9-2x} - \sqrt[4]{9-2x}}.$$

$$9.709. \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$9.711. \int \frac{x+9}{(x+8)\sqrt{x+6}} dx.$$

$$9.713. \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx.$$

$$9.715. \int \sqrt{5-x^2} dx.$$

$$9.717. \int \sqrt{6x-x^2-7} dx.$$

$$9.719. \int \sqrt{3-4x-x^2} dx.$$

$$9.721. \int (x+2)^2 \sqrt{-4x-x^2} dx.$$

$$9.723. \int (x+2)^3 \sqrt{(x^2+4x+2)^3} dx.$$

$$9.725. \int \frac{dx}{(x^2-2x+3)\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$9.727. \int \frac{x^2}{\sqrt{(3+x^2)^5}} dx.$$

$$9.729. \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x^2-2x+2)^5}} dx.$$

$$9.731. \int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{(-x^2-4x-2)^3}} dx.$$

$$9.733. \int \frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^4} dx.$$

$$9.735. \int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$$

$$9.737. \int \frac{\sqrt{2-2x+x^2}}{3-2x+x^2} dx.$$

$$9.739. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}.$$

$$9.741. \int \frac{dx}{x \sqrt{x-x^2}}.$$

$$9.742. \int \frac{dx}{x \sqrt{11x - x^2}}.$$

$$9.744. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$9.746. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2x}}.$$

$$9.748. \int \frac{dx}{(x+3) \sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

$$9.750. \int \frac{3x-16}{\sqrt{x^2 - 11x + 32}} dx.$$

$$9.752. \int \frac{5x-7}{\sqrt{-x^2 + 8x - 7}} dx.$$

$$9.754. \int \frac{x+1}{(x+3) \sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx.$$

$$9.756. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^3}}.$$

$$9.758. \int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{1+(x-2)^3}}.$$

$$9.760. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt[4]{x^3 - 3x^2 + 3x}}.$$

$$9.762. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$9.764. \int \frac{x^3}{\sqrt{(5-7x^2)^3}} dx.$$

$$9.766. \int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}} dx.$$

$$9.768. \int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{\sqrt{x+2}+1}} dx.$$

$$9.770. \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx.$$

$$9.772. \int \sqrt{x+1} \left(1 + \sqrt[3]{x+1}\right)^4 dx.$$

$$9.774. \int \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$9.743. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{2x^2 + 6x + 5}}.$$

$$9.745. \int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}}.$$

$$9.747. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{2x^2 - 6x + 3}}.$$

$$9.749. \int \frac{dx}{(x+3) \sqrt{5x^2 + 28x + 40}}.$$

$$9.751. \int \frac{x-2}{x \sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx.$$

$$9.753. \int \frac{3x+5}{(x+2) \sqrt{x^2 + 5x + 7}} dx.$$

$$9.755. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$9.757. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$9.759. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{(x+2)^2}}.$$

$$9.761. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}.$$

$$9.763. \int \frac{x^3}{\sqrt{(2+3x^2)^3}} dx.$$

$$9.765. \int \frac{dx}{(2-x)^3 \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 6}}.$$

$$9.767. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{2-x}}}{2-x} dx.$$

$$9.769. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} \left(\sqrt[4]{x-1} + 1\right)^{10}}.$$

$$9.771. \int \frac{\sqrt[3]{(1-4x^3)^2}}{x^6} dx.$$

$$9.773. \int \sqrt[3]{x} \sqrt{5x \sqrt[3]{x} + 3} dx.$$

$$9.775. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}}.$$

9.7. Контрольные задания к главе 9

Вариант 1

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}.$
2. $\int \sin 2x \sin \frac{x}{5} dx.$
3. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x - 1} dx.$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{8 + x^2}}.$
5. $\int x^2 \arcsin \frac{x}{2} dx.$
6. $\int x\sqrt{6 - x} dx .$

Вариант 2

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{14x - x^2 - 45}}.$
2. $\int \sin 3x \cos 4x dx.$
3. $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + 1} dx.$
4. $\int \sin^2 3x dx.$
5. $\int (x - 3) \sin \frac{x}{4} dx.$
6. $\int \frac{dx}{9 - 3 \cos x} .$

Вариант 3

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 2x - x^2}}.$
2. $\int \cos \frac{x}{2} \cos 3x dx.$
3. $\int \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x + 21}{x + 3} dx.$
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 3}}.$
5. $\int (x + 3) \operatorname{arctg} \frac{x}{5} dx.$
6. $\int \sqrt{2x^2 - 3x + 5} dx .$

Вариант 4

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}.$
2. $\int \frac{2 + \sin^3 x}{3 - 3 \cos 2x} dx.$
3. $\int \frac{3x - 10}{x^4 - 5x^3} dx.$
4. $\int \frac{x - 7}{\sqrt{14x + x^2}} dx.$
5. $\int x \ln \frac{x}{7} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt{5 - x^2}}{x} dx .$

Вариант 5

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 5x - 6}.$
2. $\int \sin(6x + 1) \cos 4x dx.$
3. $\int \frac{dx}{8 + x^3}.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x - 3} - \sqrt{2x - 3}}.$
5. $\int e^{\frac{x}{5}} \sin 7x dx.$
6. $\int x\sqrt{4 - x} dx .$

Вариант 6

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{2x^2 - x - 1}.$
2. $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx.$
3. $\int \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}.$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{24 + x^2}}.$
5. $\int x \ln(x - 2) dx.$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5 - 2 \ln x}}.$

Вариант 7

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x(x + 10)}.$
2. $\int \frac{dx}{5 + \sin 3x}.$
3. $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 4x + 1} dx.$
4. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 11}} dx.$
5. $\int e^{-x} \sin \frac{x}{5} dx.$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - x^2}}.$

Вариант 8

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{21x^2 - 11x - 2}.$
2. $\int \cos^3(2x + 7) dx.$
3. $\int \frac{x^4}{x^2 + 16} dx.$
4. $\int \sqrt{\frac{3x + 7}{5x + 12}} dx.$
5. $\int \ln(x^2 - 3x + 2) dx.$
6. $\int \sqrt{x^2 + x - 3} dx.$

Вариант 9

Найти интегралы.

1. $\int \frac{x - 2}{x^3 + 4x} dx.$
2. $\int \cos^4 3x dx.$
3. $\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 6} dx.$
4. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx.$
5. $\int (x^2 - 5x + 1) \sin \frac{x}{5} dx.$
6. $\int \frac{dx}{2 - 7 \sin x + 4 \cos x}.$

Вариант 10

Найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{12 - x^2 - 33}}.$
2. $\int \frac{dx}{3 + 4 \sin \frac{x}{2}}.$
3. $\int \frac{dx}{(x - 1)^3 (2 - x)^2}.$
4. $\int \frac{\sqrt{10 - x^2}}{x} dx.$
5. $\int (x^2 - x + 5) e^x dx.$
6. $\int \frac{dx}{3 - \sin x + 3 \cos x}.$

Глава 10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

10.1. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разбиением отрезка $[a, b]$ назовем конечное множество точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, таких что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются *частичными отрезками*, число $\Delta = \max_{k=1, n} \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, называется *диаметром разбиения*.

Выберем произвольно на каждом частичном отрезке точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и построим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n,$$

которая называется *интегральной суммой* или *суммой Римана*, соответствующей данному разбиению отрезка $[a, b]$ и выбору точек ξ_i . Рассмотрим предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Если существует этот предел, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора промежуточных точек ξ_i , то говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема по Риману* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Число a называется *нижним пределом*, число b – *верхним пределом* интеграла, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x) dx$ – *подынтегральным выражением*, а задача о нахождении $\int_a^b f(x) dx$ – *интегрированием функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* .

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 10.1).

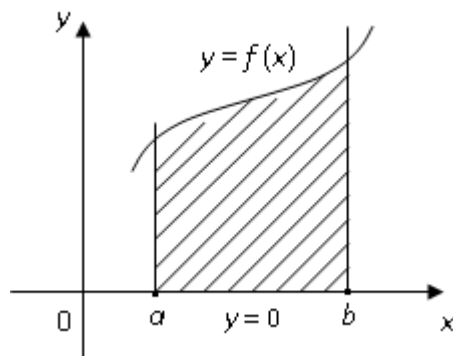


Рис. 10.1

Основные свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \text{ где } c - \text{ постоянная.}$$

6. Если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для $x \in (a; b)$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \left(\int_a^b f(x) dx \leq 0 \right).$$

7. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ для $x \in (a; b)$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx.$$

8. Оценка определенного интеграла: если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, где m, M – некоторые числа, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

9. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$,

что справедливо равенство $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ (теорема о среднем значении).

10. Если функция $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по его переменному верхнему пределу x существует и равна значению подынтегральной функции при том же x .

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 10.1. Вычислить интеграл $\int_0^2 x^2 dx$ как предел интегральной суммы.

Решение. Так как $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$, то разделим отрезок $[0, 2]$ на n равных частей $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$ и выберем $\xi_k = x_k$. Получим

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{n}, \quad x_2 = \frac{4}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{2n-2}{n}, \quad x_n = \frac{2n}{n} = 2,$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \quad f(\xi_2) = \left(\frac{4}{n}\right)^2, \quad \dots, \quad f(\xi_n) = \left(\frac{2n}{n}\right)^2,$$

$$f(\xi_k) \Delta x_k = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2^3 k^2}{n^3}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^3 k^2}{n^3} = 2^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Продифференцировав тождество $(x-1)(x^2 + x^3 + \dots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ три раза по x и положив затем $x = 1$, можно найти, что

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \quad \text{и, значит,}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k(1 + (k-1)) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(1+n)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом,

$$\int_0^2 x^2 dx = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} = \frac{8}{3}.$$

Пример 10.2. Оценить интеграл $\int_5^{13} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1$, то при $x > 5$ получим неравенство

$$\left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} < 5^{-2}. \text{ Следовательно, } \left| \int_5^{13} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| < 8 \cdot 5^{-2}, \text{ т.е.}$$

$$\left| \int_5^{13} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| < 0,32.$$

Пример 10.3. Оценить интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2+5\cos^2 x}$.

Решение. Поскольку $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, то $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2+5\cos^2 x} \leq \frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{7} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2+5\cos^2 x} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ или } \frac{\pi}{84} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2+5\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{24}.$$

Пример 10.4. Вычислить среднее значение функции $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в интервале $(1, 4)$.

Решение. Согласно теореме о среднем $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$. Тогда

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \text{ В данном примере } f(c) = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{3}{2} x^{2/3} \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \cdot 4^{4/3} + \frac{3}{2} \cdot 2^{2/3} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right) = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}.$$

Пример 10.5. Вычислить $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx$.

Решение. Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \ln x - \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} + \ln 2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{65}{24} + \ln 2.$$

Пример 10.6. Вычислить $\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$.

Решение.

$$\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx = \int_0^3 \left(x^{1/2} + x^{2/3} \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{5} x^{5/3} \right) \Big|_0^3 = 2\sqrt{3} + \frac{9}{5} \sqrt[3]{9}.$$

Пример 10.7. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \Big|_0^2 = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 1,11.$$

Пример 10.8. Вычислить $\int_0^{e-1} \frac{3x-5}{x+1} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \frac{3x-5}{x+1} dx &= \int_0^{e-1} \frac{3(x+1)-8}{x+1} dx = \int_0^{e-1} \left(3 - \frac{8}{x+1} \right) dx = \left(3x - 8 \ln|x+1| \right) \Big|_0^{e-1} = \\ &= 3e - 3 - 8 = 3e - 11. \end{aligned}$$

Пример 10.9. Вычислить $\int_{-1}^0 \frac{2x^2 - x + 7}{x+3} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{2x^2 - x + 7}{x+3} dx &= \int_{-1}^0 \left(2x - 7 + \frac{28}{x+3} \right) dx = \left(x^2 - 7x + 28 \ln|x+3| \right) \Big|_{-1}^0 = \\ &= 28 \ln 3 - (1 + 7 + 28 \ln 2) = 28 \ln \frac{3}{2} - 8. \end{aligned}$$

Пример 10.10. Вычислить $\int_3^6 e^{x/3} dx$.

Решение. $\int_3^6 e^{\frac{x}{3}} dx = 3 \int_3^6 e^{\frac{x}{3}} d\left(\frac{x}{3}\right) = 3e^{\frac{x}{3}} \Big|_3^6 = 3(e^2 - e) = 3e(e-1).$

Пример 10.11. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} \cos^3 2x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} \cos^3 2x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} \cos^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} (1 - \sin^2 x) d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) = \frac{11}{48}. \end{aligned}$$

Пример 10.12. Решить уравнение $\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} = \ln 2$.

Решение.

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln |\arcsin x| \Big|_{\frac{1}{2}}^x = \ln |\arcsin x| - \ln \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, имеем уравнение $\ln |\arcsin x| - \ln \frac{\pi}{6} = \ln 2$, откуда

$$\ln |\arcsin x| = \ln \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin x = \ln \frac{\pi}{3} \left(\text{т.к. } x > \frac{1}{2} \right), \quad x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.1 – 10.3 найти интегралы составлением интегральных сумм и переходом к пределу.

10.1. $\int_0^1 x dx.$

10.2. $\int_0^1 x^2 dx.$

10.3. $\int_0^1 e^x dx.$

В задачах 10.4 – 10.9 оценить интегралы.

10.4. $\int_0^1 x(1-x)^2 dx.$

10.5. $\int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx.$

10.6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

10.7. $\int_1^2 \sqrt{8+x^3} dx.$

10.8. $\int_4^5 \frac{\sin x}{1+x^4} dx.$

10.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}.$

В задачах 10.10 – 10.12 найти среднее значение функции $y = f(x)$ на заданном отрезке.

10.10. $f(x) = x^2$ на отрезке $[4, 5]$.

10.11. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ на отрезке $[0, 1]$.

10.12. $f(x) = 5 - 2\sin x + 3\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

В задачах 10.13 – 10.89 вычислить интегралы.

10.13. $\int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x} \right) dx.$

10.14. $\int_1^3 (x+1)^2 dx.$

10.15. $\int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx.$

10.16. $\int_0^1 (3x^3 + 1)^6 x^2 dx.$

$$10.17. \int_{-1}^{27} \sqrt[3]{x} \, dx.$$

$$10.19. \int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \, dx.$$

$$10.21. \int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2 + 4} \, dx.$$

$$10.23. \int_1^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

$$10.25. \int_0^2 \frac{2x - 1}{2x + 1} \, dx.$$

$$10.27. \int_0^1 \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} \, dx.$$

$$10.29. \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{3 + x^2}.$$

$$10.31. \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{12 + x^2}.$$

$$10.33. \int_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$10.35. \int_1^5 \frac{dx}{x^2 - 4x}.$$

$$10.37. \int_0^2 \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} \, dx.$$

$$10.39. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 + x^6}} \, dx.$$

$$10.41. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{6 - 4x - 2x^2}}.$$

$$10.43. \int_{0.75}^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}.$$

$$10.45. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$10.47. \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx.$$

$$10.18. \int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx.$$

$$10.20. \int_3^7 \sqrt{x - 3} \, dx.$$

$$10.22. \int_0^{0.5} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$

$$10.24. \int_0^1 \frac{2x - x^2 - 1}{x + 1} \, dx.$$

$$10.26. \int_3^4 \frac{x^3 + 3}{x - 2} \, dx.$$

$$10.28. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$10.30. \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{6 + x^2}.$$

$$10.32. \int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

$$10.34. \int_3^8 \frac{dx}{x^2 - 6x + 34}.$$

$$10.36. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$10.38. \int_0^1 \frac{x}{1 + x^4} \, dx.$$

$$10.40. \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^8} \, dx.$$

$$10.42. \int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}.$$

$$10.44. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$10.46. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx.$$

$$10.48. \int_0^1 x e^{3x^2} \, dx.$$

$$10.49. \int_0^3 2^x dx.$$

$$10.51. \int_0^{0.5} 5^{\arcsin 2x} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$10.53. \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$10.55. \int_0^1 e^{x+e^x} dx.$$

$$10.57. \int_0^1 e^{5x^3+1} x^2 dx.$$

$$10.59. \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$

$$10.61. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$$

$$10.63. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$$

$$10.65. \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^2 x dx.$$

$$10.67. \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$10.69. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\cos^2 5x}.$$

$$10.71. \int_0^{\pi/4} \cos^3 x dx.$$

$$10.73. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx.$$

$$10.75. \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 7x dx.$$

$$10.77. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$10.79. \int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx.$$

$$10.50. \int_{-1}^0 x^2 9^{x^3+1} dx.$$

$$10.52. \int_0^1 9^{3\sqrt{x}+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$10.54. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$10.56. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$10.58. \int_{e^3}^{e^4} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$10.60. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$10.62. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx.$$

$$10.64. \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx.$$

$$10.66. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$10.68. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 3x}.$$

$$10.70. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx.$$

$$10.72. \int_0^{\pi/4} \cos^3 2x dx.$$

$$10.74. \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx.$$

$$10.76. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx.$$

$$10.78. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx.$$

$$10.80. \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \sin 4x)^2 \cos 4x dx.$$

$$10.81. \int_0^{\pi} \sqrt[3]{3+2\cos x} \sin x dx.$$

$$10.83. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}.$$

$$10.85. \int_1^{e^2} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$10.87. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$10.89. \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\arcsin^2 3x \sqrt{1-9x^2}}.$$

$$10.82. \int_0^{\pi} \sin \frac{6x}{3} \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$10.84. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx.$$

$$10.86. \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x} dx.$$

$$10.88. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\operatorname{arctg} x + 1)(1+x^2)}.$$

10.2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, а $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi[\alpha, \beta] = [a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива *формула замены переменной в определенном интеграле*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) d\varphi(t).$$

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, то имеет место *формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Если функция $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0;$$

если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

если $f(x)$ – периодическая функция периода T , то при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Пример 10.13. Вычислить интеграл $\int_{-2}^3 x\sqrt{7-x} dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $t = \sqrt{7-x}$, из которой получим $x = 7-t^2$, $dx = -2t dt$. Вычислим новые пределы интегрирования: если $x = -2$, то $t = 3$; если $x = 3$, то $t = 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 x\sqrt{7-x} dx &= \int_3^2 (7-t^2)t(-2t dt) = -2 \int_3^2 (7t^2 - t^4) dt = 2 \int_2^3 (7t^2 - t^4) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{7t^3}{3} \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{56}{3} - \frac{243}{5} + \frac{189}{3} \right) = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Пример 10.14. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^3 \sqrt{2x^2-1} dx$.

Р е ш е н и е. Положим $\sqrt{2x^2-1} = t$. Тогда $x^2 = \frac{t^2+1}{2}$, $2x dx = t dt$. Если $x = 1$, то $t = 1$; если $x = 2$, то $t = \sqrt{7}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \sqrt{2x^2-1} dx &= \int_1^{\sqrt{7}} x^2 \sqrt{2x^2-1} x dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{7}} \frac{t^2+1}{2} t \cdot t dt = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{7}} (t^4 + t^2) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{7}} = \frac{1}{4} \left(\frac{49\sqrt{7}}{5} + \frac{7\sqrt{7}}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{91\sqrt{7}}{30} - \frac{2}{15} = \frac{1}{30} (91\sqrt{7} - 4). \end{aligned}$$

Пример 10.15. Вычислить интеграл $\int_5^{12} \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$.

Р е ш е н и е. Положим $\sqrt{x+4} = t$. Тогда $x = t^2 - 4$, $dx = 2t dt$. Если $x = 5$, то $t = 3$; если $x = 12$, то $t = 4$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_5^{12} \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx &= 2 \int_3^4 \frac{(t^2-4)t dt}{t} = 2 \int_3^4 (t^2-4) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - 4t \right) \Big|_3^4 = \\ &= 2 \left(\frac{64}{3} - 16 - 9 + 12 \right) = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

Пример 10.16. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^4 \cdot \sqrt{1-x^2} dx$.

Р е ш е н и е. Пусть $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 1$, то $t = \pi/2$. Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^4 \cdot \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (\cos^3 2t - \cos^2 2t - \cos 2t + 1) dt = \\
&= \left[\cos^3 2t = (1-\sin^2 2t) \cos 2t \right] = \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 2t) d(\sin 2t) - \\
&- \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 4t) dt - \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt + \frac{1}{8} t \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{1}{16} \left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{16} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{64} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{16} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8} t \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{1}{16} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{48} \sin^3 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{64} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Пример 10.17. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos x + 1}$.

Решение. Применим подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, из которой $x = 2\arctg t$,

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Если $x=0$, то $t=0$; если $x=\pi/2$, то $t=1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos x + 1} &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(3 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 1 \right)} = \int_0^1 \frac{dt}{2-t^2} = - \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{2})^2} = \\
&= - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| \Big|_0^1 = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right| = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Пример 10.18. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{e^x}$. Тогда $e^x = t^2$, $x = 2\ln t$, $dx = \frac{2dt}{t}$ и,

$$\begin{aligned}
\text{если } x=0, \text{ то } t=1; \text{ если } x=2, \text{ то } t=e. \text{ Значит, } \int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx &= 2 \int_1^e \frac{t dt}{t \cdot \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} = \\
&= \ln \left| t^2 + \sqrt{t^4 + 1} \right| \Big|_1^e = \ln \left(\frac{e^2 + \sqrt{e^4 + 1}}{1 + \sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

Пример 10.19. Вычислить интеграл $\int_e^{e^2} (3 - \ln x)^2 dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} (3 - \ln x)^2 dx &= \left[u = (3 - \ln x)^2, dv = dx, du = \frac{2(\ln x - 3)}{x} dx, v = x \right] = \\ &= x(3 - \ln x)^2 \Big|_e^{e^2} - 2 \int_e^{e^2} (\ln x - 3) dx = \left[u = \ln x - 3, dv = dx, du = \frac{dx}{x}, v = x \right] = \\ &= x(3 - \ln x)^2 \Big|_e^{e^2} - 2 \left(x(\ln x - 3) \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx \right) = e^2(3 - 2)^2 - e(3 - 1)^2 - \\ &- 2(e^2(2 - 3) - e(1 - 3) - e^2 + e) = e^2 - 4e + 2e^2 - 4e + 2e^2 - 2e = 5e^2 - 10e. \end{aligned}$$

Пример 10.20. Вычислить интеграл $\int_{-5}^5 \frac{x^2 \sin 3x}{2x^2 + 3} dx$.

Решение. Подынтегральная функция – нечетная, следовательно,

$$\int_{-5}^5 \frac{x^2 \sin 3x}{2x^2 + 3} dx = 0.$$

Пример 10.21. Вычислить интеграл $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция – четная, то

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \left[u = \operatorname{arctg} x, dv = x dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2} \right] = \\ &= 2 \left(\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) = x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \pi - x \Big|_0^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.90 – 10.113, 10.115 – 10.147 вычислить интегралы методом замены переменной.

10.90. $\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x} dx$.

10.91. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$.

$$10.92. \int_0^2 \frac{\sqrt{2x}}{1+2x} dx.$$

$$10.94. \int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$$

$$10.96. \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} x^2 \sqrt{4-3x^2} dx.$$

$$10.98. \int_{-2\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \sqrt{27-x^2} dx.$$

$$10.100. \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2} dx.$$

$$10.102. \int_{0,5}^1 x^2 \sqrt{9-4x^2} dx.$$

$$10.104. \int_{2\sqrt{2}}^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$10.106. \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 \sqrt{12-x^2} dx.$$

$$10.108. \int_0^3 \frac{dx}{10x+3\sqrt{5x+1}}.$$

$$10.110. \int_{0,25}^1 \frac{dx}{(1+2\sqrt{x})^2}.$$

$$10.112. \int_{1/3}^{5/3} \frac{dx}{3x+\sqrt{6x-1}}.$$

$$10.114. \text{ Решить уравнение: } \int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$$

$$10.116. \int_{3/\sqrt{5}}^{4/\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}}.$$

$$10.118. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$10.120. \int_2^8 \frac{x}{\sqrt{2+2x}} dx.$$

$$10.93. \int_{4/3}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}.$$

$$10.95. \int_{-1}^4 x^3 \sqrt{1-7x} dx.$$

$$10.97. \int_0^{2/3} \sqrt{6x-9x^2} dx.$$

$$10.99. \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx.$$

$$10.101. \int_0^{0,5} \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$10.103. \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{2-x^2} dx.$$

$$10.105. \int_{0,2}^{0,4} \sqrt{(4-25x^2)^3} dx.$$

$$10.107. \int_{0,5}^{1,5} x^3 \sqrt{4x^2-1} dx.$$

$$10.109. \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx.$$

$$10.111. \int_0^2 \sqrt{\frac{x}{4-x}} dx.$$

$$10.113. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}.$$

$$10.115. \int_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx.$$

$$10.117. \int_{-3x\sqrt{x^2-1}}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.119. \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{4x+5}} dx.$$

$$10.121. \int_{1/3}^1 \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+15x+1}}.$$

$$10.122. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

$$10.124. \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx.$$

$$10.126. \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$10.128. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(9x^2+3)^5}}.$$

$$10.130. \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

$$10.132. \int_0^2 \frac{e^x + 2e^{x/2}}{e^x + 1} dx.$$

$$10.134. \int_0^\pi \frac{dx}{5-3\cos 2x}.$$

$$10.136. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{3+\cos 2x}.$$

$$10.138. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}.$$

$$10.140. \int_0^{\pi/3} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3+\sin x} dx.$$

$$10.142. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$$

$$10.144. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} dx.$$

$$10.146. \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} dx.$$

$$10.123. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx.$$

$$10.125. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$10.127. \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2 \sqrt{2+x^2}} dx.$$

$$10.129. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1+2\ln x}}.$$

$$10.131. \int_0^{2\ln 2} \sqrt{e^{x/2}-1} dx.$$

$$10.133. \int_0^{\ln 5/2} \frac{e^{2x} \sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}+3} dx.$$

$$10.135. \int_0^\pi \frac{dx}{2-\sin \frac{x}{2}}.$$

$$10.137. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin 2x}.$$

$$10.139. \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3+2\cos 3x}.$$

$$10.141. \int_0^\pi \frac{\sin \frac{x}{2}}{1+3\cos \frac{x}{2}} dx.$$

$$10.143. \int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos^2 3x dx.$$

$$10.145. \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\sin \frac{x}{2}}} dx.$$

$$10.147. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6-5\sin x + \sin^2 x} dx.$$

В задачах 10.148 – 10.150 вычислить интегралы.

$$10.148. \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$10.149. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin^3 x \cos 4x dx.$$

$$10.150. \int_{-7}^7 x^3 \sqrt{6+3x^2} dx.$$

В задачах 10.151 – 10.184 вычислить интегралы интегрированием по частям.

$$10.151. \int_0^{0,5} x e^{-2x} dx.$$

$$10.152. \int_0^2 x^3 e^x dx.$$

$$10.153. \int_2^3 (x-4) e^{x-2} dx.$$

$$10.154. \int_{-\pi}^{\pi} e^{x/2} \cos x dx.$$

$$10.155. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin 2x dx.$$

$$10.156. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos^2 2x dx.$$

$$10.157. \int_0^{\pi/6} e^{3x} \cos 3x dx.$$

$$10.158. \int_0^{\pi} e^x \sin \frac{3x}{2} dx.$$

$$10.159. \int_0^2 e^{3x/2} \cos 2x dx.$$

$$10.160. \int_1^{e^2} \ln x dx.$$

$$10.161. \int_{-2}^{-1} \ln(x+3) dx.$$

$$10.162. \int_2^{e+1} (1 + \ln(x-1))^2 dx.$$

$$10.163. \int_1^{16} \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$10.164. \int_{0,5}^{0,5e} x \ln(1+4x^2) dx.$$

$$10.165. \int_4^2 x^2 \ln \frac{x}{2} dx.$$

$$10.166. \int_{0,5}^{0,5e} x^2 \ln 4x dx.$$

$$10.167. \int_2^{2e^{\pi/2}} \cos \ln \frac{x}{2} dx.$$

$$10.168. \int_{-3}^0 x \cos \frac{5\pi x}{3} dx.$$

$$10.169. \int_0^{3\pi/4} x \sin \frac{2x}{3} dx.$$

$$10.170. \int_{-3}^0 x \cos \frac{\pi x}{3} dx.$$

$$10.171. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$$

$$10.172. \int_0^{4\pi} x \sin \frac{x}{4} dx.$$

$$10.173. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$10.174. \int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx.$$

$$10.175. \int_0^{\pi/4} x^2 \cos^2 2x dx.$$

$$10.176. \int_0^{2\pi} x^3 \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$10.177. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$10.178. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(x^2 \sin 5x + \cos \frac{x}{3} + tg^3 x \right) dx.$$

$$10.179. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$10.180. \int_0^{1,5} \arcsin \frac{x}{3} dx.$$

$$10.181. \int_0^{0,5} \arccos 2x \, dx.$$

$$10.182. \int_2^4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \, dx.$$

$$10.183. \int_0^{2\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \, dx.$$

$$10.184. \int_0^2 \frac{\arcsin(x+1)}{2+x} \, dx.$$

10.3. Приближенное вычисление определенных интегралов (формула трапеций). Несобственные интегралы

Точное вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница не всегда возможно или целесообразно. В этих случаях, а также в случае, когда подынтегральная функция задана табличным способом, определенные интегралы вычисляют приближенно.

Формула трапеций относится к одной из простейших формул приближенного вычисления определенных интегралов и имеет вид

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right),$$

где n – число частей, на которые разбивается отрезок $[a, b]$;

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$; $y_i = f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$) – значения подынтегральной функции в точках разбиения отрезка $[a, b]$. Заметим, что число n выбирается произвольно, и чем больше n , тем с большей точностью получим значение интеграла.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a, b]$, то абсолютная погрешность формулы трапеций выражается не-

равенством $\Delta(n) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$, где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Пример 10.22. По формуле трапеций, приняв $n = 5$, вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ и оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

Решение. В данном случае $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $\frac{b-a}{n} = 0,2$ и

$x_k = x_0 + 0,2k$ ($k = \overline{1, 5}$). Находим $x_0 = 0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$; $x_5 = 1$;

$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{2+0} = 0,5$; $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{2,2}$; $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{2,4}$; $y_3 = f(x_3) = \frac{1}{2,6}$;

$y_4 = f(x_4) = \frac{1}{2,8}$; $y_5 = f(x_5) = \frac{1}{3}$.

По формуле трапеций получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+x} \approx 0,2 \left(\frac{0,5+0,333}{2} + 0,4545 + 0,4167 + 0,3846 + 0,3571 \right) \approx \\ \approx 0,2 \cdot 2,0296 \approx 0,4059.$$

Оценим абсолютную погрешность. Для этого находим

$f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$; $f'''(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$, т.е. критической точки на отрезке $[0, 1]$ функция $\frac{2}{(2+x)^3}$ не имеет. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на отрезке $[0, 1]$, надо сравнить значения $f''(x)$ на концах данного отрезка: $f''(0) = \frac{1}{4}$, $f''(1) = \frac{2}{27}$. Значит,

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{4}, \quad \text{и} \quad \Delta(5) \leq \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{1200} \approx 0,00083 < 0,001.$$

Пример 10.23. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций с точностью до 0,001 вычислить

интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx$.

Р е ш е н и е. Число отрезков n , на которые нужно разбить промежуток интегрирования, найдем из неравенства $\frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} \leq \varepsilon$, из которого

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}.$$

Поскольку $f(x) = \cos \frac{x}{2}$; $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$, то

$$M_2 = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{4}. \quad \text{Значит,}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{8 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 0,001}} = \sqrt{80,623}, \quad n \geq 9.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.185 – 10.188 вычислить приближенно интегралы по формуле трапеций с точностью до 0,01.

$$10.185. \int_0^3 \frac{dx}{x+2}.$$

$$10.186. \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

$$10.187. \int_0^{1,2} e^x dx.$$

$$10.188. \int_0^2 e^{-x^2} dx.$$

В задачах 10.189 – 10.220 по формуле трапеций вычислить интегралы, приняв $n = 10$.

$$10.189. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

$$10.190. \int_0^1 \frac{dx}{1+2x}.$$

$$10.191. \int_0^1 \frac{dx}{1+3x}.$$

$$10.192. \int_0^1 \frac{dx}{1+4x}.$$

$$10.193. \int_0^1 \frac{dx}{1+5x}.$$

$$10.194. \int_0^1 \frac{dx}{1+6x}.$$

$$10.195. \int_0^1 \frac{dx}{1+7x}.$$

$$10.196. \int_0^1 \frac{dx}{1+8x}.$$

$$10.197. \int_0^1 \frac{dx}{1+9x}.$$

$$10.198. \int_0^1 \frac{dx}{1+10x}.$$

$$10.199. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

$$10.200. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}.$$

$$10.201. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+9}.$$

$$10.202. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+16}.$$

$$10.203. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+25}.$$

$$10.204. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+36}.$$

$$10.205. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+49}.$$

$$10.206. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+64}.$$

$$10.207. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+81}.$$

$$10.208. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+100}.$$

$$10.209. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$$

$$10.210. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+2}.$$

$$10.211. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+3}.$$

$$10.212. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+4}.$$

$$10.213. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+5}.$$

$$10.214. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+6}.$$

$$10.215. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+7}.$$

$$10.216. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+8}.$$

$$10.217. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+9}.$$

$$10.218. \int_0^1 \frac{dx}{x^3+10}.$$

$$10.219. \int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} dx.$$

$$10.220. \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

В задачах 10.221 – 10.228 найти, на сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интегралы с точностью до 0,001.

$$10.221. \int_1^3 \frac{dx}{x}.$$

$$10.223. \int_1^4 x(\ln x - 1) dx.$$

$$10.225. \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

$$10.227. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$10.222. \int_0^{1,2} \sin x dx.$$

$$10.224. \int_0^3 \frac{dx}{x+2}.$$

$$10.226. \int_1^2 e^x dx.$$

$$10.228. \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

В задачах 10.229 – 10.232 вычислить приближенно интегралы по формуле трапеций и оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

$$10.229. \int_{-1}^5 (x^2 - 2) dx, \quad n = 6.$$

$$10.230. \int_0^4 \sqrt{x} dx, \quad n = 8.$$

$$10.231. \int_0^6 (x^2 + 3) dx, \quad n = 6.$$

$$10.232. \int_0^4 (x^2 + 1) dx, \quad n = 8.$$

$$10.233. \text{Зная, что } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ вычислить приближенно число } \pi, \text{ воспользовав-}$$

шись формулой трапеций при $n = 10$. Оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

$$10.234. \text{Зная, что } \int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln 2,5, \text{ вычислить приближенно значение } \ln 2,5, \text{ вос-}$$

пользовавшись формулой трапеций при $n = 8$. Оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

10.235. Ширина реки 28 м; промеры глубины в поперечном сечении реки через каждые 2 м дали следующие результаты (x – расстояние от одного берега; y – соответствующая глубина):

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
y	0,2	0,9	1,5	2,1	2,7	3,5	3,2	3,1	3,6	2,8	1,6	1,3	0,7	0,5	0,3

Определить секундный расход Q воды в реке, если средняя скорость те-

$$\text{чения } v = 1,5 \text{ м/с. } \left(Q = S \cdot V, \quad S = \int_0^{28} y dx \right).$$

10.236. Прямая линия касается берега реки в точках A и B . Для измерения площади участка между рекой и прямой AB проведены 11 перпендикуляров к AB от реки через каждые 5 м ($AB = 60$ м). Длины этих перпендикуляров оказались равными 3,28 м; 4,02 м; 4,64 м; 5,26 м; 4,98 м; 3,62 м; 3,82 м; 4,68 м; 5,26 м; 3,82 м; 3,24 м. Вычислить приближенное значение площади участка.

Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами*.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом конечном его отрезке $[a; b]$, $a < b$. Тогда несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, кото-

рый обозначается символом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на промежутках $(-\infty; b]$ и $(-\infty; +\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Если сходятся оба интеграла в правой части последней формулы, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется *сходящимся*, и *расходящимся*, если хотя бы один из них расходится.

Если $f(x)$ непрерывна для всех x отрезка $[a, b]$, кроме точки c , в которой $f(x)$ имеет разрыв II рода, то по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

где ε и δ изменяются независимо друг от друга.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ ($f(c) = +\infty$, $a < c < b$) называется *сходящимся*, если оба предела в правой части равенства существуют, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

В случае $c = a$ или $c = b$ получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (\varepsilon > 0),$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad (\delta > 0).$$

При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1⁰. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на промежутке $[a; +\infty)$, интегрируемы на отрезке $[a, A]$, где $A \geq a$ и $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ для всех $x \geq a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ (признак сравнения).

2⁰. Пусть на промежутке $[a; +\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на любом конечном промежутке $[a, b]$. Тогда, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сравнения).

3⁰. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. В этом случае интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

4⁰. Если при $x \rightarrow +\infty$ функция $f(x) > 0$ является бесконечно малой порядка α по сравнению с $\frac{1}{x}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

На практике часто для сравнения используется функция $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$. Известно, что $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Аналогичные признаки сходимости можно указать и для интегралов от разрывных функций. Для сравнения в признаке 4⁰ используют интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{или} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

который сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример 10.24. Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx$ или установить его рас-

ХОДИМОСТЬ.

Р е ш е н и е. Найдем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_1^a \operatorname{arctg} 3x d(\operatorname{arctg} 3x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{6} \Big|_1^a \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} (\operatorname{arctg}^2 3a - \operatorname{arctg}^2 3) = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \operatorname{arctg}^2 3 \right) \approx 0,15. \end{aligned}$$

Данный интеграл сходится и приближенно равен 0,15.

Пример 10.25. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ или установить его

расХОДИМОСТЬ.

Р е ш е н и е. Разложив подынтегральную функцию, находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \\ &- \frac{1}{3} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} - \\ &- \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_a^0 \right) + \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^b \right) - \\ &- \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_a^0 \right) - \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^b \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{6} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{6}$.

Пример 10.26. Исследовать интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$ на сходимость.

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{d(x^3)}{x^3} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x^{-3} dx + \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{d(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_1^a \right) + \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\ln |x^3| \Big|_1^a \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \right) + \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} (\ln a^3 - \ln 1) = \frac{1}{2} + \infty. \end{aligned}$$

Исходный интеграл расходится, так как расходится один из интегралов в правой части последнего равенства.

Пример 10.27. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \left[\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x - 1) + 1}{1 - \sin^2 x} \cos x = \right. \\ &= -\cos x + \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \Big] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi/2-\varepsilon} (-\cos x) dx + \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \right) = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} d(\sin x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin x \Big|_0^{\pi/2-\varepsilon} - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \Big|_0^{\pi/2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) - 1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + 1} \right| = \\ &= -1 - \frac{1}{2} \cdot \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Пример 10.28. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Решение. Функция $\frac{1}{(x-2)^2}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} &= \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon_1} (x-2)^{-2} d(x-2) + \\ &+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon_2}^3 (x-2)^{-2} d(x-2) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x-2} \Big|_0^{2-\varepsilon_1} \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x-2} \Big|_{2+\varepsilon_2}^3 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) = \infty + \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Пример 10.29. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^8}$ в промежутке инте-

грирования меньше, чем $\varphi(x) = \frac{1}{x^8}$. Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^8}$:

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^8} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x^{-8} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{7x^7} \Big|_1^a \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7a^7} \right) = \frac{1}{7}$, т.е. интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^8}$ сходится, а, значит, и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$ также сходится на основании признака сравнения.

Пример 10.30. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$.

Решение. Так как $\frac{\cos x}{x^3} \leq \frac{|\cos x|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x^{-3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_1^a \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, а тогда, согласно признаку сравнения, сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x| dx}{x^3}$. Следовательно, на основании признака 3⁰ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ сходится.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.237 – 10.281 вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

10.237. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

10.238. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x+2}$.

10.239. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$.

10.240. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

10.241. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

10.242. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

10.243. $\int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$.

10.244. $\int_{-\infty}^0 \frac{x+1}{x^2+1} dx$.

10.245. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$.

10.246. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

10.247. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

10.248. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$.

10.249. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$.

10.250. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$10.251. \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx.$$

$$10.253. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$10.255. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+5)^5}.$$

$$10.257. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$10.259. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$10.261. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$10.263. \int_1^{+\infty} e^{-3x} dx.$$

$$10.265. \int_0^{+\infty} x 2^{-x} dx.$$

$$10.267. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$10.269. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$10.271. \int_{e^3}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x}.$$

$$10.273. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$10.275. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx.$$

$$10.277. \int_0^{+\infty} \sin 5x dx.$$

$$10.279. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 7x dx.$$

$$10.281. \int_0^{+\infty} e^{-px} dx.$$

$$10.252. \int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx.$$

$$10.254. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

$$10.256. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$10.258. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.260. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

$$10.262. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.264. \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

$$10.266. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$10.268. \int_0^{+\infty} \ln 2x dx.$$

$$10.270. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2} dx.$$

$$10.272. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$10.274. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$10.276. \int_0^{+\infty} x \cos x dx.$$

$$10.278. \int_0^{+\infty} \cos x dx.$$

$$10.280. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

В задачах 10.282 – 10.306 исследовать на сходимость несобственные интегралы.

$$10.282. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$10.283. \int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

$$10.284. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

$$10.285. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

$$10.286. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$$

$$10.287. \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1} dx.$$

$$10.288. \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3+1}} dx.$$

$$10.289. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$10.290. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}.$$

$$10.291. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+x^2}}.$$

$$10.292. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}} dx.$$

$$10.293. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2+1}.$$

$$10.294. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$10.295. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

$$10.296. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx.$$

$$10.297. \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$10.298. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx.$$

$$10.299. \int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx.$$

$$10.300. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$10.301. \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx.$$

$$10.302. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$10.303. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3+\sqrt{x}} dx.$$

$$10.304. \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+\sin x} dx.$$

$$10.305. \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

$$10.306. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

В задачах 10.307 – 10.338 вычислить интегралы.

$$10.307. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$10.308. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}.$$

$$10.309. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$10.310. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$10.311. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$10.313. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$10.315. \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$10.317. \int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^{4/5}} dx.$$

$$10.319. \int_0^3 \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} dx.$$

$$10.321. \int_0^1 \frac{2-\sqrt[3]{x}-x^3}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

$$10.323. \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$10.325. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$10.327. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.329. \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$10.331. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$10.333. \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx.$$

$$10.335. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$10.337. \int_2^{e+1} \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{\ln(x-1)}}.$$

$$10.312. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$$

$$10.314. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10.316. \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$10.318. \int_0^1 \frac{x^2 + \sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$10.320. \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$10.322. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$10.324. \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

$$10.326. \int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$10.328. \int_2^3 \frac{3x}{2^4 \sqrt{x^2-4}} dx.$$

$$10.330. \int_0^{0.5} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$10.332. \int_0^1 x^2 \ln x dx.$$

$$10.334. \int_0^1 x \ln^2 x dx.$$

$$10.336. \int_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$10.338. \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

В задачах 10.339 – 10.375 исследовать интегралы на сходимость.

$$10.339. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}.$$

$$10.340. \int_0^2 \frac{dx}{2-x}.$$

$$10.341. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}.$$

$$10.342. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$10.343. \int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$$10.344. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

- 10.345. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$ 10.346. $\int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-4} dx.$ 10.347. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x^2-4)}.$
- 10.348. $\int_0^3 \frac{dx}{27-x^3}.$ 10.349. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}.$ 10.350. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$
- 10.351. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}.$ 10.352. $\int_0^1 \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx.$ 10.353. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$
- 10.354. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}.$ 10.355. $\int_0^e \frac{dx}{e^x-1}.$ 10.356. $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x}.$
- 10.357. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$ 10.358. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx.$ 10.359. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} dx.$
- 10.360. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1} dx.$ 10.361. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$ 10.362. $\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1} dx.$
- 10.363. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$ 10.364. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$ 10.365. $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$
- 10.366. $\int_0^1 \sin(\ln x) dx.$ 10.367. $\int_0^1 \cos(\ln x) dx.$ 10.368. $\int_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$
- 10.369. $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx.$ 10.370. $\int_0^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}.$ 10.371. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$
- 10.372. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$ 10.373. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx.$ 10.374. $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$
- 10.375. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 3x}{\sin x} dx.$

10.4. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$), то площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 10.2), вычисляется по

формуле $S = \int_a^b f(x) dx$, причем $S \geq 0$.

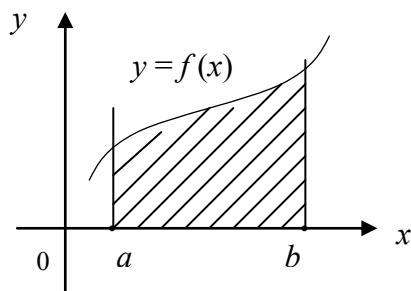


Рис. 10.2

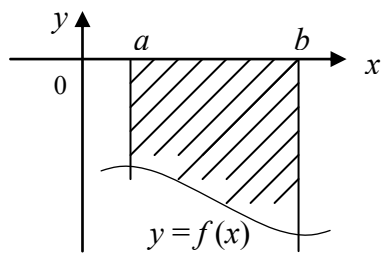


Рис. 10.3

Если $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ (рис. 10.3), то в этом случае

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c, y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ ($g(y) \geq 0, \forall y \in [c, d]$) и осью Oy (рис. 10.4), вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d g(y) dy.$$

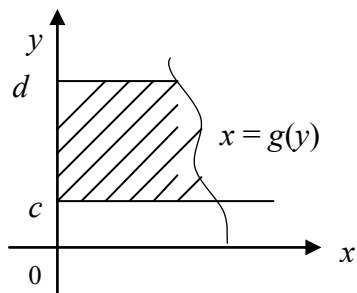


Рис. 10.4

Если криволинейная трапеция ограничена кривыми $y=f_1(x), y=f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a, b]$) (рис. 10.5), то ее площадь равна

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

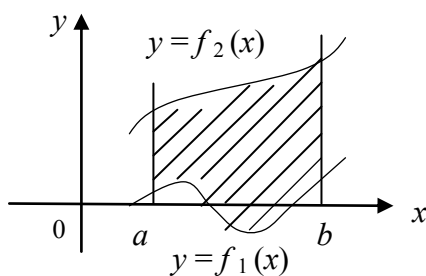


Рис. 10.5

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ ($g_1(y) \leq g_2(y)$, $\forall y \in [c, d]$) (рис. 10.6), то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y)) dy$.

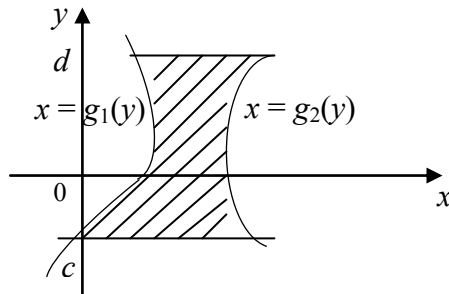


Рис. 10.6

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, находится по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt$$

при условии, что $x = x(t)$ строго возрастает на $[t_1, t_2]$. Если же $x = x(t)$ — строго убывающая на $[t_1, t_2]$ функция, то $S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt$.

Пример 10.31. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi/4$) (рис. 10.7).

Решение. Данная фигура является криволинейной трапецией, прилегающей к оси Ox , поэтому ее площадь

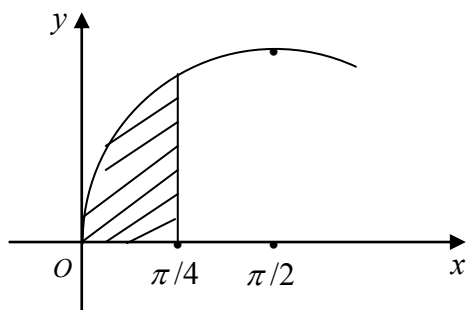


Рис. 10.7

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= -\sin \frac{\pi}{4} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Пример 10.32. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$, касательной к ней в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и осью Ox (рис. 10.8).

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где угловой коэффициент $k = y' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$. Следовательно,

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow y = -x + \sqrt{2} -$$

искомое уравнение касательной. Касательная пересекает ось Ox в точке $B(\sqrt{2}; 0)$. Найдем площадь заштрихованной фигуры ABC :

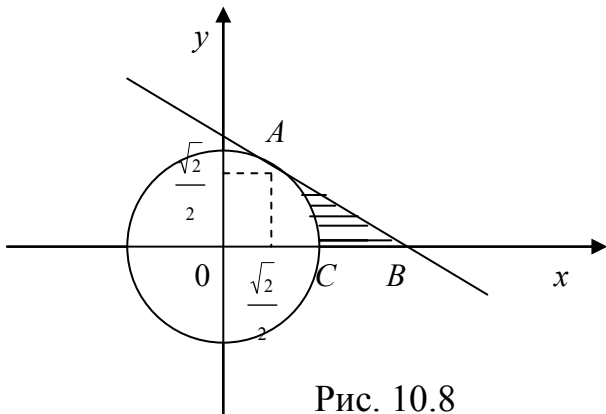


Рис. 10.8

$$S = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (-x + \sqrt{2}) dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x \right) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$= \left[x = \sin t, dx = \cos t dt, \text{ если } x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то } t = \frac{\pi}{4}; \text{ если } x = 1, \text{ то } t = \frac{\pi}{2} \right] = -1 + 2 +$$

$$+ \frac{1}{4} - 1 - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4-\pi}{8} \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 10.33. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x - x^2$, $y = x - 2$ (рис. 10.9).

Решение.

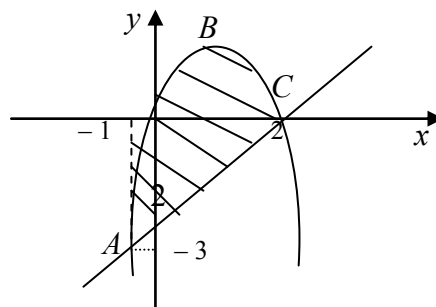


Рис. 10.9

Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = x - 2, \end{cases}$ $2x - x^2 = x - 2$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $y_1 = -3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$. Следовательно, кривые пересекаются в точках $A(-1; -3)$ и $C(2; 0)$. Таким образом, искомая площадь фигуры ABC

$$S = \int_{-1}^2 (2x - x^2 - x + 2) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 10.34. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x + 4$, $x - y - 2 = 0$ (рис. 10.10).

Решение.

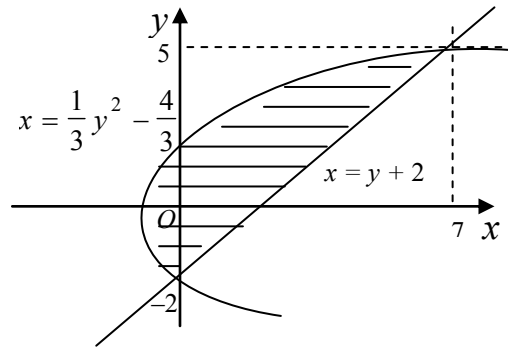


Рис. 10.10

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y^2 = 3x + 4, \\ x = y + 2, \end{cases}$

$$y^2 = 3(y + 2) + 4, \quad y^2 - 3y - 10 = 0, \quad y_1 = -2, \quad y_2 = 5.$$

Находим площадь фигуры:

$$S = \int_{-2}^5 \left(y + 2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3} \right) dy = \int_{-2}^5 \left(-\frac{1}{3}y^2 + y + \frac{10}{3} \right) dy = \left(-\frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{10}{3}y \right) \Big|_{-2}^5 = \frac{343}{18}.$$

Пример 10.35. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (рис. 10.11).

Решение. Вычислим площадь S_1 ее части, ограниченной дугой AB , и результат увеличим в 4 раза.

Если $x = 0$, то $t = \frac{\pi}{2}$; если $x = a$, то $t = 0$.

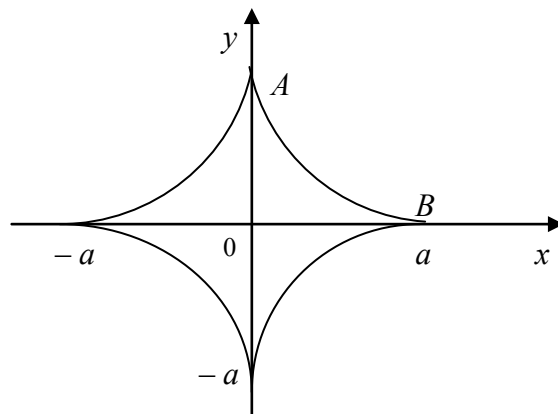


Рис. 10.11

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \\
 &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 2t - \cos^2 2t - \cos 2t + 1) dt = \\
 &= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2t) d(\sin 2t) - \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt - \frac{3}{16} a^2 \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8} a^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{3}{16} a^2 \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16} a^2 \sin^3 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16} a^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{64} a^2 \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi a^2}{16} = \\
 &= -\frac{3a^2 \pi}{32} + \frac{3\pi a^2}{16} = \frac{3\pi a^2}{32}.
 \end{aligned}$$

Искомая площадь $S = 4S_1 = \frac{3\pi a^2}{8}$ (кв.ед).

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.376 – 10.497 найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

10.376. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

10.377. $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$.

10.378. $y = 4x - x^2$ и осью Ox .

10.379. $y = x^2 + 1$, $y = 2$.

10.380. $y = 0$, $y = 2x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 1$.

10.381. $y = x^2$, $y = x + 2$.

10.382. $y = x^2 - x$, $y = 3x$.

- 10.383. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$. 10.384. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = 10 - x$.
- 10.385. $y = x$, $y = 2x - x^2$. 10.386. $y = 7x - 2x^2$, $x + y = \frac{7}{2}$.
- 10.387. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$. 10.388. $y = \frac{x^2}{2} - x + 2$, $y = x$, $x = 0$.
- 10.389. $y = 2(1 - x)$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$. 10.390. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.
- 10.391. $y = 0$, $y = 4(x - 2)$, $y = (x - 1)^2$.
- 10.392. $x = 0$, $y = -2x + 4$, осью Ox и $y = x^2 + 1$.
- 10.393. $y = 0$, $x = 0$, $y = -x + 1$, $y = 2 - x^2$.
- 10.394. $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$. 10.395. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.
- 10.396. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.
- 10.397. $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$.
- 10.398. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x = 0$, $y = 6$ ($x < 0$).
- 10.399. $x^2 = 4y$, $x + y = 3$. 10.400. $y^2 = 8x$, $2x - 3y + 8 = 0$.
- 10.401. $y = x^2$, $y = 3x + 4$. 10.402. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 4 - 2x$.
- 10.403. $y = 0$, $y = -x + 2$, $y = \sqrt{x}$. 10.404. $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$.
- 10.405. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$. 10.406. $y = x^2$, $y = x$.
- 10.407. $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$. 10.408. $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$.
- 10.409. $y^2 = (x - 1)^2$.
- 10.410. $y = -x^2 + 6x - 5$ и осями координат.
- 10.411. $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2 - \frac{3}{2}x$. 10.412. $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x - 4$.
- 10.413. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$. 10.414. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.
- 10.415. $4y = x^2$, $2y - 6x + x^2 = 0$. 10.416. $y = x^2 + 1$, $2y = x^2$, $y = 5$.
- 10.417. $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$. 10.418. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 = 24x = 48$.
- 10.419. $y = x^2 - 6x + 9$, $4x - y - 12 = 0$. 10.420. $y = x^2 - 2x$, $y = 3$.
- 10.421. $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 0$. 10.422. $y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 16$.
- 10.423. $x^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 8$. 10.424. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$.
- 10.425. $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$. 10.426. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
- 10.427. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. 10.428. $y = 6x - x^2$, $y = 0$.
- 10.429. $y^2 = 1 - x$, $x = -3$.

- 10.430. $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 6x - x^2$, $x = -1$.
- 10.431. $y = x^2 - 6x + 7$, $y = x + 1$.
- 10.432. $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = x - 5$.
- 10.433. $y = x^2 - 6x + 7$, $y = -x + 7$.
- 10.434. $y = -x^2 - 6x - 5$, $y = x + 1$.
- 10.435. $y = x^2 + 2$, $y = x + 2$.
- 10.436. $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.
- 10.437. $y^2 = 9x$, $y = x + 2$.
- 10.438. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
- 10.439. $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$.
- 10.440. $y = 9 - x^2$, $y = 0$.
- 10.441. $y^2 - 4y = 5 - x$, $x = 0$.
- 10.442. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.
- 10.443. $y = 2x - x^2$, $y = -x$.
- 10.444. $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$.
- 10.445. $xy = 2$, $x + 2y = 5$.
- 10.446. $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$.
- 10.447. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 2$.
- 10.448. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.
- 10.449. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.
- 10.450. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.
- 10.451. $y = \frac{4}{x^2}$, $x = 1$, $y = x - 1$.
- 10.452. $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$.
- 10.453. $xy = 3$, $x + y = 4$.
- 10.454. $y = \frac{6}{x}$, $y = 5 - x$.
- 10.455. $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$, $x = 6$.
- 10.456. $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$.
- 10.457. $y = \frac{9}{x}$, $y = x$, $x = 9$, $y = 0$.
- 10.458. $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $y - 6 = 0$.
- 10.459. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.
- 10.460. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$, $y = \frac{x^2}{x - 2}$.
- 10.461. $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$ и осью Ox .
- 10.462. $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$.
- 10.463. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.
- 10.464. $y = 2^{x-3} + 1$, $y = 2^{3-x} + 1$, $y = \frac{3}{2}$.
- 10.465. $y = |\log_2 x|$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.
- 10.466. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.
- 10.467. $y = 1 - e^x$, $x = 2$, $y = 0$.
- 10.468. $y = 1 - e^x$, $y = 1 - e^2$, $x = 0$.
- 10.469. $y = e^x$, $x = -1$, $x = 0$.
- 10.470. $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), $x = 0$.
- 10.471. $y + x = 3$, $x^2 + y^2 = 9$.
- 10.472. $x + y = 3$, $x = \sqrt{9 - y^2}$.
- 10.473. $y = \cos x$, $y = 1 + \frac{2}{\pi}x$, $x = \frac{\pi}{2}$.
- 10.474. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 10.475. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

10.476. $y = \sin 6x$, $x = 0$, $x = \pi$ и осью Ox .

10.477. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$. 10.478. $y = 2 - |2 - x|$, $y = \frac{3}{|x|}$.

10.479. $y = \frac{|4 - x^2|}{4}$, $y = 7 - |x|$.

10.480. $x = 12 \cos t + 5 \sin t$, $y = 5 \cos t - 12 \sin t$.

10.481. Одной аркой циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ и осью Ox ($0 \leq t \leq 2\pi$).

10.482. $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ (эллипс).

10.483. $y = 2x^2 - 8x$, касательной к этой параболе в ее вершине и осью ординат.

10.484. $y^2 = -x - 16$ и касательными к этой параболе, проведенными из начала координат.

10.485. $y = x^2 + 4x + 9$ и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$.

10.486. $y = 1 + 4x - x^2$ и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

10.487. $xy = 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 4)$, $(0,5; 6)$.

10.488. $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки $(0; 1)$.

10.489. $y = 2x^2$, осью Ox и касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке (x_0, y_0) , где $x_0 = 2$.

10.490. $y = x^2 - x + 2$ и касательной к кривой $y = \ln x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.

10.491. $y = e^{3x}$, $x = 3$ и прямой, являющейся касательной к линии $y = e^{3x}$ в точке с абсциссой $x = 0$.

10.492. $y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $y = 0$, $x = 0$ и прямой, являющейся касательной к линии $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

10.493. К эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ проведена касательная в точке $C(2; \sqrt{3})$. Найти площадь криволинейного треугольника ABC , где $A(4; 0)$ – вершина эллипса, а B – точка пересечения касательной с осью Ox .

10.494. $y = x^2$ и нормалью к ней, проведенной через точку параболы с абсциссой $x = 1$.

10.495. $y = 2x^2$ и нормалью к ней в точке $(2; 2)$.

10.496. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b$).

10.497. Круг $x^2 + y^2 \leq 75$ разделен гиперболой $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{100} = 1$ на три части. Найти площадь средней части.

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг оси Ox (рис. 10.12), находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

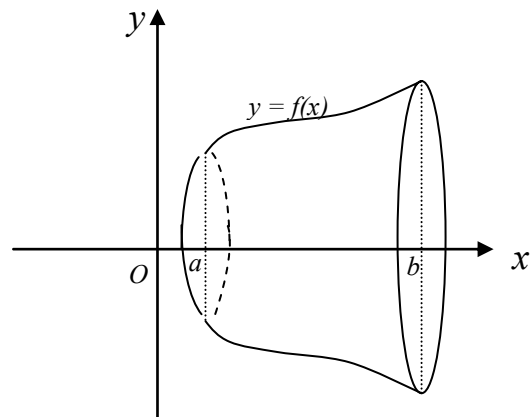


Рис. 10.12

Если вокруг оси Ox вращается фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a, b]$) и прямыми $x = a$, $x = b$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 10.13), определяется по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

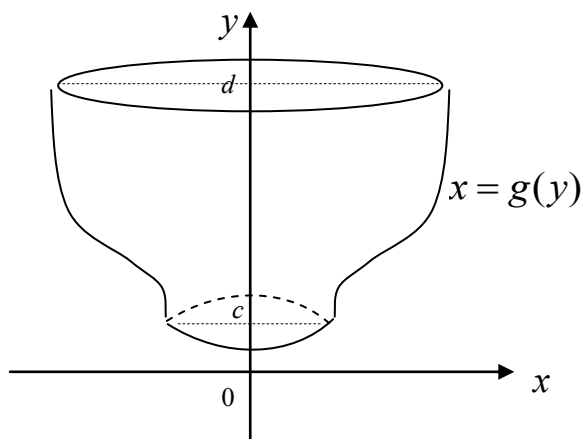


Рис. 10.13

Если фигура ограничена кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ ($0 \leq g_1(y) \leq g_2(y)$, $y \in [c, d]$) и прямыми $y = c$, $y = d$, то объем тела, полученный при вращении этой фигуры вокруг оси Oy , можно найти по формуле

$$V = \pi \int_c^d (g_2^2(y) - g_1^2(y)) dy.$$

Пример 10.36. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 9$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 6$ (рис. 10.14).

Решение. Находим

$$V = \pi \int_3^6 \left(\frac{9}{x} \right)^2 dx = 81\pi \int_3^6 x^{-2} dx = \frac{-81\pi}{x} \Big|_3^6 = -81\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) = \frac{27}{2} \pi.$$

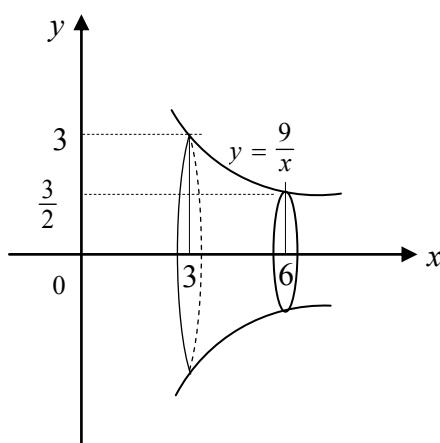


Рис. 10.14

Пример 10.37. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $4y = x^2$, $x + 4y - 12 = 0$ (рис. 10.15).

Р е ш е н и е. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ 4y + x - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{4}, \\ x^2 + x - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{4}, \\ x_1 = -4, \quad x_2 = 3. \end{cases}$$

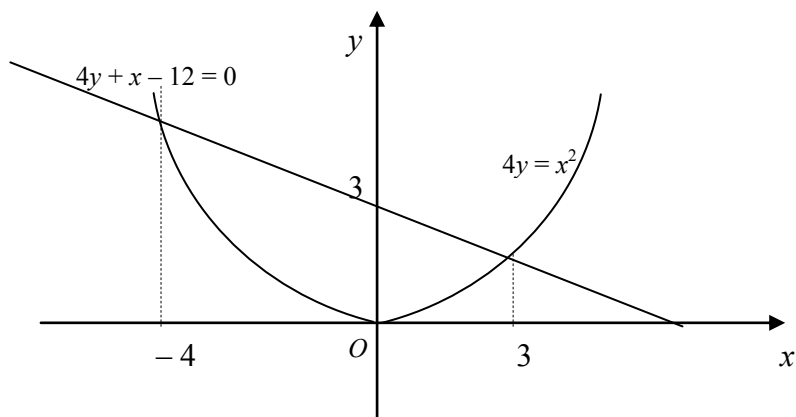


Рис. 10.15

Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^3 \left(\left(3 - \frac{x}{4} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right) dx = \pi \int_{-4}^3 \left(9 - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{16} \right) dx = \\ &= \pi \left(9x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{80}x^5 \right) \Big|_{-4}^3 = \pi \left(27 - \frac{27}{4} + \frac{9}{16} - \frac{243}{80} + 36 + 12 + \frac{4}{3} - \frac{64}{5} \right) = \\ &= 54 \frac{37}{120} \pi. \end{aligned}$$

Пример 10.38. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xu = 5$, $y = 1$, $y = 5$ и осью Oy (рис. 10.16).

Р е ш е н и е.

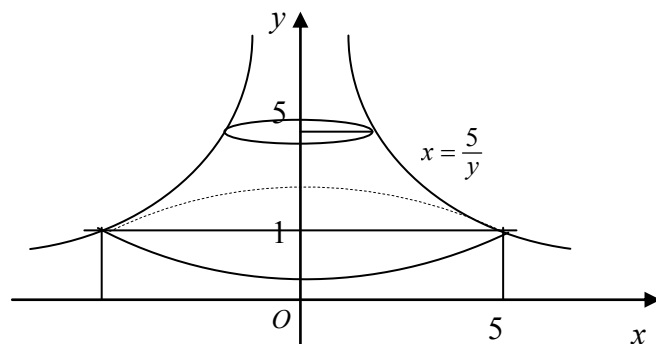


Рис. 10.16

Искомый объем

$$V = \pi \int_1^5 \left(\frac{5}{y} \right)^2 dy = 25\pi \int_1^5 y^{-2} dy = \left. \frac{-25\pi}{y} \right|_1^5 = -25\pi \left(\frac{1}{5} - 1 \right) = 20\pi.$$

Пример 10.39. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos \frac{x}{6}$, $y = \arccos \frac{x}{2}$, $y = 0$ (рис. 10.17).

Решение.

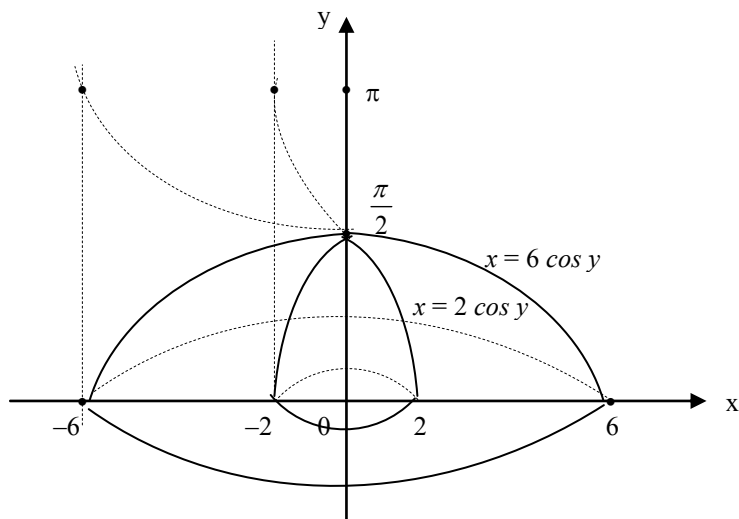


Рис. 10.17

Так как $y = \arccos \frac{x}{6}$, то $|x| \leq 6$ и $x = 6 \cos y$; $y \in [0; \pi]$ при $x = 0$ $y = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично для $y = \arccos \frac{x}{2}$, $|x| \leq 2$, $x = 2 \cos y$; $y \in [0; \pi]$. Значит,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} \left((6 \cos y)^2 - (2 \cos y)^2 \right) dy = 32\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 y dy = 16\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2y) dy = \\ &= 16\pi \left(y + \frac{1}{2} \sin 2y \right) \Big|_0^{\pi/2} = 8\pi^2. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.498 – 10.548 найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными кривыми.

10.498. $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 3$.

10.499. $4xy = 25$, $y = 0$, $x = \frac{5}{2}$, $x = 5$.

10.500. $y^2 = x$, $x^2 = y$.

10.501. $x^2 = 4y$, $x^3 = 8y$.

10.502. $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = 0$, $x = 2$.

10.503. $y = 2x^2$, $8y = (x - 2)^2$, $y = 0$.

- 10.504. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$. 10.505. $y = \frac{x^2}{8} + 1$, $x - y + 7 = 0$.
- 10.506. $2y^2 = x^3$, $x = 4$. 10.507. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.
- 10.508. $x = (y - 1)^2$, $x = 0$, $y = 2$. 10.509. $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$.
- 10.510. $xy = -2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. 10.511. $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$.
- 10.512. $y = 4x - x^2$, $y = x$. 10.513. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.
- 10.514. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$. 10.515. $y = 4x - 2x^2$, $y = 2x - x^2$.
- 10.516. $y = x^3 + 2$, $x = 1$, $y = 1$. 10.517. $y = 2x - x^2$, $x + y - 2 = 0$, $x = 0$.
- 10.518. $x^2 = 1 - y$, $x = 0$, $x = \sqrt{y - 2}$, $x = 1$. 10.519. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.
- 10.520. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$. 10.521. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.
- 10.522. $y = \frac{64}{x^2 + 16}$, $x^2 = 8y$. 10.523. $(2y - 5)^2 = 10x$, $x = 0$, $y = 5$.
- 10.524. $y = 2^x$, $y = 2 - \log_2 x$, $x = 0$, $y = 0$. 10.525. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$.
- 10.526. $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$. 10.527. $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, $y = 0$.
- 10.528. $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. 10.529. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 10.530. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
- 10.531. $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
- 10.532. $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $y = x^2$. 10.533. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x = \pm a$, $y = 0$.
- 10.534. $y^2 + x^4 = x^2$. 10.535. $x^2 - y^2 = a^2$, $y = 2a$ ($a > 0$).
- 10.536. $y^2 = 2ax$, $x = a$. 10.537. $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$.
- 10.538. $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = a$. 10.539. $2py = x^2$, $2qy = (x - a)^2$, $y = 0$.
- 10.540. $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$. 10.541. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$.
- 10.542. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ ($x \geq 0$). 10.543. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1$.
- 10.544. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = a + h$. 10.545. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, $|x| = h$.
- 10.546. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 10.547. $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \leq R$, $y \leq R$).
- 10.548. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

В задачах 10.549 – 10.582 найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми.

10.549. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

10.550. $y^2 = 4x$, $y = x$.

10.551. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

10.552. $y = x^2$, $8x = y^2$.

10.553. $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$.

10.554. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.

10.555. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$ и осью Ox . **10.556.** $y^3 = 4x^2$, $y = 2$.

10.557. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

10.558. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 7$.

10.559. $8y = 3(x - 1)^2$, $8y = 3$.

10.560. $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$.

10.561. $y = x\sqrt{-x}$, $x = -4$, $y = 0$.

10.562. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

10.563. $3y = 9 - x^2$, $x + y - 3 = 0$.

10.564. $4y = 4 - x^2$, $2y = 3\sqrt{4 - x^2}$.

10.565. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

10.566. $y = \arccos \frac{x}{5}$, $y = \arccos \frac{x}{3}$, $y = 0$.

10.567. $x^2 + y^2 = 6$.

10.568. $x^2 + y^4 = y^2$.

10.569. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

10.570. $y = \arcsin x$, $y = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

10.571. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

10.572. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$.

10.573. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, $x = 0$. **10.574.** $y = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $y = 1$.

10.575. $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.

10.576. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

10.577. $xy = k^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($0 < a < b$).

10.578. $2py = (x - a)^2$, $2py = a^2$.

10.579. $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = a$.

10.580. $x^2 + y^2 = a^2$.

10.581. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

10.582. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

10.583. Плоскость, перпендикулярная к оси параболоида вращения, отсекает от него сегмент, радиус основания которого r и высота h . Найти объем сегмента.

10.584. Определить объем бочки, высота которой равна h , диаметр каждого из оснований – d , диаметр среднего сечения – D . Осевые сечения боковой поверхности являются параболом с вершинами на окружности среднего сечения.

Вычисление длины дуги кривой

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $[a; b]$, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ в промежутке $[c; d]$ и функция $x = g(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги кривой определяется по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, выражается формулой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Пример 10.40. Найти длину дуги линии $y = \ln \frac{1}{\sin x}$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Поскольку $y = \ln \frac{1}{\sin x}$, $y' = -\operatorname{ctg} x$, то

$$\begin{aligned} l &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{2} \left(\ln 3 - \ln \frac{1}{3} \right) = \ln 3 \approx 1,0986. \end{aligned}$$

Пример 10.41. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 8x$ от вершины до точки $A(8; 8)$.

Решение. Из уравнения параболы $x = \frac{y^2}{8}$, $x' = \frac{y}{4}$ и y изменяется от 0 до 8, следовательно,

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} dy = \frac{1}{4} \int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy = \left[u = \sqrt{16 + y^2}, dv = dy, du = \frac{y dy}{\sqrt{16 + y^2}}, v = y \right] = \\
&= \frac{y}{4} \sqrt{16 + y^2} \Big|_0^8 - \frac{1}{4} \int_0^8 \frac{y^2}{\sqrt{16 + y^2}} dy = 8\sqrt{5} - \frac{1}{4} \int_0^8 \frac{(16 + y^2)}{\sqrt{16 + y^2}} dy + 4 \int_0^8 \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 16}} = \\
&= 8\sqrt{5} - \frac{1}{4} \int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy + 4 \ln |y + \sqrt{16 + y^2}| \Big|_0^8 = 8\sqrt{5} - \frac{1}{4} \int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy + 4 \ln(2 + \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Мы получили уравнение, относительно $\int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy$, из которого найдем, что

$$\int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy = 16\sqrt{5} + 8 \ln(2 + \sqrt{5}) \text{ и, значит,}$$

$$l = \frac{1}{4} \int_0^8 \sqrt{16 + y^2} dy = 4\sqrt{5} + 2 \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Пример 10.42. Найти длину дуги линии $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Решение. Найдем $x'(t) = t^2 \cos t$, $y'(t) = t^2 \sin t$. Тогда

$$l = \int_0^\pi \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} dt = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

Пример 10.43. Найти длину дуги линии $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

Решение. Найдем $x'(t) = 8 \cos t - 6 \sin t$, $y'(t) = 6 \cos t + 8 \sin t$,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \\
&= \sqrt{64 \cos^2 t - 96 \sin t \cos t + 36 \sin^2 t + 36 \cos^2 t + 96 \sin t \cos t + 64 \sin^2 t} = \\
&= \sqrt{100} = 10.
\end{aligned}$$

Следовательно,
$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 10 \int_0^{\pi/2} dt = 10t \Big|_0^{\pi/2} = 5\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.585 – 10.623 найти длину дуги кривой.

10.585. $x^2 + y^2 = a^2$. **10.586.** $y = \frac{x^2}{4}$ ($0 \leq x \leq 2$).

10.587. $y = 4 - x^2$ между точками пересечения ее с осью Ox .

- 10.588. $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ ($y \geq 0$). 10.589. $x = y^2$ ($0 \leq y \leq 1$).
- 10.590. $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $(5; 5\sqrt{5})$.
- 10.591. $y^2 = 4x$ от вершины до точки $(1; 2)$.
- 10.592. $y = 2x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 11$). 10.593. $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ ($0 \leq x \leq 9$).
- 10.594. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$ ($\frac{1}{4} \leq x \leq 1$). 10.595. $y = \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$).
- 10.596. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}$ ($0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$).
- 10.597. $y^2 = x^3$ от точки $(0; 0)$ до точки $(4; 8)$.
- 10.598. $2y = x^2 - 4$ ($-2 \leq x \leq 2$). 10.599. $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 3$).
- 10.600. $y = \frac{1}{2}x^2$ ($0 \leq x \leq 1$).
- 10.601. $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 5$.
- 10.602. $y = 2\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$). 10.603. $x = \frac{2}{3}y^{3/2}$ ($0 \leq y \leq 3$).
- 10.604. $2y = x^2 - 3$, отсеченной осью Ox .
- 10.605. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.
- 10.606. $9y^2 = x(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox .
- 10.607. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$ ($1 \leq x \leq 3$). 10.608. $y = \ln x$ ($2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$).
- 10.609. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq \ln 7$).
- 10.610. $y = \ln(1 - x^2)$ от начала координат до точки $\left(\frac{1}{2}; \ln \frac{3}{4}\right)$.
- 10.611. $x = \ln \cos y$ ($0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$). 10.612. $y = \ln \sin x$ ($\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$).
- 10.613. $y = \arcsin e^x$ ($-\ln 7 \leq x \leq -\ln 2$). 10.614. $y = \arcsin e^{-x}$ ($0 \leq x \leq 1$).
- 10.615. $y = \ln(2 \cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат Oy и Ox .
- 10.616. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{1 - x}$ ($\frac{11}{36} \leq x \leq \frac{15}{16}$).
- 10.617. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ ($0 \leq x \leq \frac{9}{16}$).

10.618. $x = R(\cos t + t \sin t), y = R(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi).$

10.619. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

10.620. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ (астроида).

10.621. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида). **10.622.** $x = a \cos t, y = a \sin t.$

10.623. $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (0 \leq x \leq a).$

10.624. Доказать, что длина эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$ равна длине

синусоиды $y = \sqrt{a^2 - b^2} \sin\left(\frac{x}{b}\right) \quad (0 \leq x \leq 2\pi b).$

10.5. Приложения определенного интеграла в решении физических и экономических задач

Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t , то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 , выражается формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Если в функции Кобба-Дугласа затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала неизменными, то объем продукции V за T лет равен

$$V = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt.$$

Если проценты по вкладу начисляются непрерывно и их характеризует функция $y = f(t)$, а удельная норма процента равна i , то дисконтированный доход K за время T составляет

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt.$$

Скорость оттока рабочей силы в момент времени T можно определить при помощи уравнения восстановления

$$L(t) = f(t) + \int_{t_0}^T f(t) L(T-t) dt,$$

где $f(t)$ – доля тех, кто был вначале (при $t = t_0$) и покинул предприятие в настоящий момент, при $t = T$; $L(T-t)$ – скорость оттока людей, пришедших кому-то

на смену; $f(t)L(T-t)$ – полная скорость оттока заместителей, покидающих предприятие в настоящий момент.

Общую сумму S текущих издержек обращения и капиталовложений, сводимых к текущим затратам, можно определить по формуле

$$S = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 путь

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Пример 10.44. Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Решение. Согласно теореме о среднем значении,

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ называется средним значением функции на отрезке } [a; b].$$

В нашем случае

$$f(\xi) = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 2) dx = \frac{1}{3} (x^3 + 2x^2 + 2x) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (27 + 18 + 6) = 17 \text{ (ден.ед.)},$$

т.е. среднее значение издержек равно 17. Определим, при каком объеме издержки принимают это значение. Для этого решим уравнение

$$3x^2 + 4x + 2 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 15 = 0.$$

Так как объем продукции не может быть отрицательной величиной, то

$$\xi = x = \frac{5}{3} \text{ (ед. продукции).}$$

Пример 10.45. Найти объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего времени, если производительность труда описывается функцией $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$.

$$\text{Решение. } V = \int_2^3 (3t^2 - 2t + 1) dt = (t^3 - t^2 + t) \Big|_2^3 = 15.$$

Пример 10.46. Найти объем произведенной продукции за 5 лет, если функция Кобба–Дугласа $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

Р е ш е н и е.

$$V = \int_0^5 (1+t) e^{3t} dt = \left[u = t+1, dv = e^{3t} dt, du = dt, v = \frac{1}{3} e^{3t} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} e^{3t} (t+1) \Big|_0^5 - \frac{1}{3} \int_0^5 e^{3t} dt = \frac{1}{3} (6e^{15} - 1) - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^5 = \frac{1}{9} (17e^{15} - 2).$$

Пример 10.47. Определить дисконтированный доход, если процентная ставка – 5 %, первоначальные вложения – 5 млн р., прирост – 1 млн р. в год. Срок – 5 лет.

Р е ш е н и е. В нашем случае функция капиталовложений, согласно условию задачи, является линейной и равна $f(t) = k + lt$, где $k = 5, l = 1$, т.е. $f(t) = 5 + t$. Удельная норма процента $i = 0,05$. Тогда дисконтированный доход равен:

$$K = \int_0^5 (5+t) e^{-0,05t} dt = \left[u = 5+t, dv = e^{-0,05t} dt, du = dt, v = -20e^{-0,05t} \right] =$$

$$= -20e^{-0,05t} (5+t) \Big|_0^5 + 20 \int_0^5 e^{-0,05t} dt = 20(5 - 10e^{-0,25}) - 400e^{-0,05t} \Big|_0^5 =$$

$$= 500 - 600e^{-0,25} \approx 32,72 \text{ (млн р.)}.$$

Пример 10.48. Определить скорость оттока рабочей силы, если $t_0 = 0$; $T = 5$; $f(t) = 0,24$; $f(t)L(T-t) = e^{-t/2}(5-t)$.

Р е ш е н и е. Так как $L(t) = f(t) + \int_{t_0}^T f(t)L(T-t)dt$, то

$$L(t) = 0,24 + \int_0^5 e^{-t/2}(5-t) dt = \left[u = 5-t, dv = e^{-t/2} dt, du = -dt, v = \int_0^5 e^{-t/2} dt = -2e^{-t/2} \right] =$$

$$= 0,24 - 2e^{-t/2}(5-t) \Big|_0^5 - 2 \int_0^5 e^{-t/2} dt = 0,24 + 10 + 4e^{-t/2} \Big|_0^5 = 6,24 + 4e^{-5/2} \approx 6,547.$$

Пример 10.49. Определить общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет

вид $f(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 5}.$

Р е ш е н и е.

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{10}{t^2 + 2t + 5} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{10}{(t+1)^2 + 2^2} dt = 10 \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{2} \Big|_0^a =$$

$$= 5 \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{a+1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = 5 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \approx 5(1,57 - 0,46) \approx 5,55.$$

Пример 10.50. Скорость движения точки $v = \frac{1}{2}t^3$ м/с. Найти путь S , пройденный точкой за время $T = 5$ с. после начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Р е ш е н и е.
$$S = \int_0^5 \frac{1}{2}t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 \Big|_0^5 = 78,125 \text{ м,}$$

$$v_{cp.} = \frac{S}{T} = \frac{78,125}{5} = 15,625 \text{ м/с.}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.625 – 10.632 найти среднее значение издержек $K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от x_1 до x_2 . Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

10.625. $K(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

10.626. $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

10.627. $K(x) = e^x + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

10.628. $K(x) = 2x^2 + 3x + 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

10.629. $K(x) = 2^{x+1} + 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

10.630. $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

10.631. $K(x) = 3^x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

10.632. $K(x) = 6x^2 + 2x + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

В задачах 10.633 – 10.638 найти объем произведенной продукции за указанные промежутки времени, если производительность труда описывается заданной функцией времени.

10.633. $f(t) = \frac{t^2 + 3t}{(t+1)(t^2+1)}$ за первый час работы.

10.634. $f(t) = 32 + 28t - 9t^2$ за первую половину восьмичасового рабочего дня.

10.635. $f(t) = \frac{3}{3t+2} + 5$ за пятый час работы.

10.636. $f(t) = \frac{3}{4t+5} + 4$ за третий час работы.

10.637. $f(t) = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$ за восьмичасовой рабочий день.

10.638. $f(t) = 32 + 4t - 3t^2$ за третий и четвертый часы работы.

В задачах 10.639 – 10.642 найти объем произведенной продукции, если задана функция Кобба-Дугласа $g(t)$ и указан временной промежуток.

10.639. $g(t) = (14 + t)e^t$ за три года. **10.640.** $g(t) = (10 + t)e^{5t}$ за один год.

10.641. $g(t) = (25 + t)e^{10t}$ за пять лет. **10.642.** $g(t) = (3 + t)e^{2t}$ за два года.

10.643. Определить дисконтированный доход K , если:

- а) процентная ставка – 8 %, первоначальные вложения – 10 млн р., прирост – 1 млн р. ежегодно. Срок – 3 года;
- б) процентная ставка – 7 %, первоначальные вложения – 10 млн р., прирост – 1 млн р. в год. Срок – 6 лет;
- в) процентная ставка – 2 %, первоначальные вложения – 3 млн р., прирост – 1 млн р. в год. Срок – 10 лет.

10.644. Определить скорость оттока рабочей силы, если:

а) $f(t)L(T-t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$; $f(t) = 0,29$; $t_0 = 0$; $T = 3$;

б) $f(t)L(T-t) = \sin t \cos t$; $f(t) = 0,21$; $t_0 = 0$; $T = 6$;

в) $f(t)L(T-t) = \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}}$; $f(t) = 0,26$; $t_0 = 0$; $T = 4$;

г) $f(t)L(T-t) = 3t + 2\sqrt{t}$; $f(t) = 0,75$; $t_0 = 0$; $T = 16$.

10.645. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид:

а) $f(t) = \frac{2}{t^2+1}$;

г) $f(t) = e^{-2t}$;

б) $f(t) = \frac{1}{t^2+t+1}$;

д) $f(t) = \frac{5}{(t+4)^3}$;

в) $f(t) = \frac{4}{(t+1)\sqrt{t+1}}$;

г) $f(t) = 3e^{-4t}$.

10.646. Скорость движения тела задана формулой $v = \sqrt{1+2t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с. после начала движения.

10.647. Скорость точки $v = 0,1t^3$ м/с. Найти путь S , пройденный точкой за промежуток времени $T = 10$ с., протекий от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

10.6. Контрольные задания к главе 10

Вариант 1

1. Вычислить интеграл $\int_0^3 (x^2 - 3x) dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-7x} dx$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 5, x = 10.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 2$.

Вариант 2

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x + x^2 - x^3 - 1}{1 + x^2} dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^{-x}, x = 0, y = 0, x = 5.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $xy = 16$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 8$.

Вариант 3

1. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{6\pi} \sin^5 x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0$.

Вариант 4

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_3^6 \frac{dx}{(6-x)^2}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \cos x, y = x - \frac{\pi}{2}, x = 0.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = (x-1)^3, x = 2$.

Вариант 5

1. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

2. Вычислить интеграл $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^x, y = e, x = 0.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, y = 2$.

Вариант 6

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или установить его расходи-

мость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin 2x, y = \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $3y + x^2 = 9, x + y = 3$.

Вариант 7

1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$ или установить его

расходимость.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = |\ln x|, y = 0, x = \frac{1}{e}, x = e.$$

5. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = 5x$.

Вариант 8

1. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2 - 15}}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 + x = 4, \quad y^2 - 3x = 12.$$

5. Найти длину дуги кривой $y = e^x$ ($\ln 3 \leq x \leq \ln 5$).

Вариант 9

1. Вычислить интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{\pi/2+1/2} \frac{2x-5}{4x^2-4x+17} dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{5-x}}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

5. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Вариант 10

1. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin^3 x dx$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ или установить его расходимость.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^{-x}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = 4.$$

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Глава 11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Основные понятия и определения

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (11.1)$$

где F – функция своих аргументов, заданная в области D , x – независимая переменная, $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ – искомая функция и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

Порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение (11.1), называется *порядком этого уравнения*. Дифференциальное уравнение (11.1) будет n -го порядка при условии, что $y^{(n)}$ обязательно входит в это уравнение.

Решением дифференциального уравнения (11.1) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная в области D , которая, будучи подставлена в уравнение (11.1) вместе со своими производными, обращает его в тождество. График этой функции называется *интегральной кривой*. Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то его обычно называют интегралом дифференциального уравнения.

Процесс отыскания решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В общем случае нахождения решений уравнения (11.1) потребуется n последовательных интегрирований, поэтому общее решение будет содержать n произвольных постоянных, т.е. иметь вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (11.2)$$

или

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (11.3)$$

Соотношение (11.3) называется *общим интегралом уравнения* (11.1). Придавая в соотношениях (11.2) или (11.3) произвольным постоянным $C_1, C_2, \dots, C_n$ конкретные числовые значения, получим *частное решение* или *частный интеграл*.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (11.4)$$

Если оно разрешимо относительно y' , то

$$y' = f(x, y), \quad (11.5)$$

где функция $f(x, y)$ задана в некоторой области D плоскости (x, y) .

Функция вида $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением дифференциального уравнения* первого порядка, определенного в области D , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) при любых значениях C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения первого порядка;
- 2) для любых начальных условий $(x_0; y_0) \in D$ существует такое значение постоянной C , что выполняется равенство $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

Функция $\Phi(x, y, C) = 0$, обращающая дифференциальное уравнение первого порядка в тождество, называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (и общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одного параметра C .

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка формулируется следующим образом: найти решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального порядка, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, т.е. найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку с координатами $(x_0; y_0)$.

Могут быть случаи, когда из общего решения уравнения некоторые решения не получаются ни при каких значениях C . Такие решения называются *особыми*. Признаком особого решения служит нарушение свойства единственности, т.е. если интегральная кривая является особым решением $y = \psi(x)$, то через каждую точку этой кривой будет проходить, по крайней мере, еще одна интегральная кривая того же уравнения, имеющая в этой точке ту же касательную.

Пример 11.1. Определить порядок дифференциального уравнения:

а) $y^{IV} - 2y' + 4 = 0$; б) $y'' + xy' - x^2 = 0$; в) $y' - x^2y = 0$.

Решение. Первое уравнение является дифференциальным уравнением 4-го порядка, так как порядок старшей, входящей в него производной равен 4; второе – уравнением 2-го порядка, поскольку порядок старшей производной равен 2; третье уравнение является уравнением 1-го порядка, так как оно содержит только первую производную.

Пример 11.2. Показать, что функция $y = e^{3x}$ является решением дифференциального уравнения $y''' - 3y' - 18y = 0$.

Решение. Найдем производные нужного порядка $y = e^{3x}$, $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, $y''' = 27e^{3x}$ и подставим их выражения в уравнение. Получим тождество $27e^{3x} - 9e^{3x} - 18e^{3x} \equiv 0$. Это означает, что функция $y = e^{3x}$ является решением данного дифференциального уравнения. Это частное решение, так как оно не содержит произвольной постоянной.

Пример 11.3. Установить, является ли функция $x^2 + y^2 - Cx = 0$ общим интегралом дифференциального уравнения $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$.

Решение. Найдем производную $2x + 2yy' - C = 0$, т.е. $y' = \frac{C - 2x}{2y}$. Из уравнения $x^2 + y^2 - Cx = 0$ находим $C = \frac{x^2 + y^2}{x}$ и подставляем его в формулу для производной: $y' = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x} - 2x}{2y}$, $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$. Подстановка производной в дифференциальное уравнение приводит к тождеству $2xy \frac{y^2 - x^2}{2xy} + x^2 - y^2 \equiv 0$.

Таким образом, неявная функция $x^2 + y^2 - Cx = 0$ является общим интегралом данного дифференциального уравнения.

Пример 11.4. Показать, что функция $y = x^2 + C$ является решением дифференциального уравнения $y' = 2x$. Построить семейство интегральных кривых и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(2; 3)$.

Решение. Найдем производную $y' = (x^2 + C)' = 2x$ и подставим ее в данное уравнение. Получим тождество $2x = 2x$.

Следовательно, $y = x^2 + C$ является решением данного дифференциального уравнения.

Уравнение

$$y = x^2 + C \quad (*)$$

определяет семейство парабол (рис. 11.1), которое и будет семейством интегральных кривых. Найдем интегральную кривую (параболу), проходящую через заданную точку $(2; 3)$. Подставив координаты этой точки в уравнение (*), получим $3 = 2^2 + C$, откуда $C = -1$, следовательно, функция $y = x^2 - 1$ является частным решением данного дифференциального уравнения, а ее график (интегральная кривая) будет проходить через заданную точку.

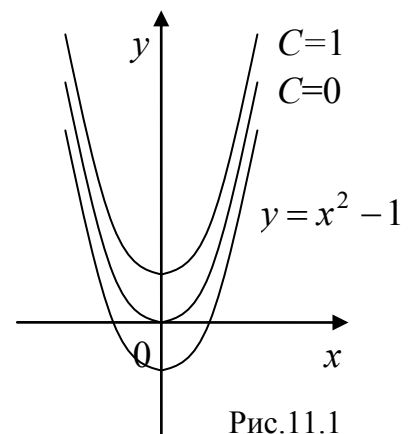


Рис.11.1

Пример 11.5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' = \frac{1}{x^2}$.

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Р е ш е н и е. Данное дифференциальное уравнение – 2-го порядка, следовательно, его необходимо дважды проинтегрировать, и общее решение будет зависеть от двух постоянных: $y' = -\frac{1}{x} + C_1$, $y = -\ln|x| + C_1x + C_2$.

Используя начальные условия, находим значения постоянных:

$$\begin{cases} 1 = -1 + C_1, \\ 0 = -\ln 1 + C_1 + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение дифференциального уравнения – $y = -\ln|x| + 2x - 2$.

Пример 11.6. Дано семейство функций $y = x + C\sqrt{1+x^2}$, где C – параметр. Найти дифференциальное уравнение с заданным семейством решений.

Р е ш е н и е. Из семейства функций легко увидеть, что $C = \frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}}$. Продифференцировав $y = x + C\sqrt{1+x^2}$, получим $y' = 1 + \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}$. Подставив значение C , получим $y' = 1 + \frac{x(y-x)}{1+x^2}$ или $y' = \frac{1+xy}{1+x^2}$. Это и есть искомое уравнение; его общее решение $y = x + C\sqrt{1+x^2}$.

Пример 11.7. Для семейства функций $x + y + C(1-xy) = 0$ найти дифференциальное уравнение.

Р е ш е н и е. Из исходного уравнения определим $C = \frac{x+y}{xy-1}$. Продифференцируем исходное уравнение. Получим $1 + y' - C(y + xy') = 0$. Подставим значение C . Тогда $1 + y' - \frac{(x+y)(y+xy')}{xy-1} = 0$, $xy-1 + y'xy - y' - xy - x^2y' - -y^2 - yxy' = 0$. Отсюда $y' + \frac{1+y^2}{1+x^2} = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Определить порядок дифференциального уравнения.

- | | |
|--|------------------------------|
| а) $xy' - y + x\sqrt{x^2 + y^2} = 0$; | б) $y'' + y = 0$; |
| в) $y^{IV} - 3y' + 8 = 0$; | г) $y' + p(x)y = q(x)$; |
| д) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$; | е) $y''' + ay'' - by' = 0$. |

11.2. Установить, является ли данная функция решением (интегралом) соответствующего дифференциального уравнения.

а) $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$; $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$;

б) $y = C_1 \sin 7x + C_2 \cos 7x$; $y'' + 49y = 0$;

в) $y = Cx + \frac{1}{C}$; $xy' - y + \frac{1}{y} = 0$;

г) $y = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}} \right)$; $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$;

д) $y = Ce^x \sin x$; $y'' - 2y' + 2y = 0$;

е) $y = Ce^x - e^{-x}$; $xy'' + 2y' - xy = 0$;

ж) $y = \frac{2 + Cx}{1 + 2x}$; $2(1 + x^2 y') = y - xy'$;

з) $y^2 - x^2 = 0$; $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$;

и) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$; $xyy' - y^2 = x^2 y'$;

к) $x^2 + y^4 = Cy^2$; $xy dx = (x^2 - y^4) dy$.

11.3. Дано общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 0$. Найти частные решения, если:

а) $C_1 = 1, C_2 = 0$; б) $C_1 = 0, C_2 = 1$; в) $C_1 = 3, C_2 = 5$.

11.4. Дано общее решение $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$. Найти частные решения, если:

а) $y(0) = 2, y'(0) = 0$; б) $y(0) = 1, y'(0) = 3$; в) $y(1) = e^2, y'(1) = 0$.

11.5. Проинтегрировать дифференциальные уравнения, найти указанные частные решения и построить их.

а) $y' = 3x^2$; $y(0) = 2$;

б) $y'' = 2$; $y(0) = 1, y'(0) = -2$;

в) $y''' = 6$; $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = 6$;

г) $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$; $y(1) = 5$.

д) $y' = y^2$; $y(0) = 1$.

11.6. Составить дифференциальные уравнения заданных семейств функций.

а) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$;

б) $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

г) $y = \frac{C - x^2}{2x}$;

д) $(x - C)^2 + y^2 = 1$;

е) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cy^2$;

ж) $\arcsin \frac{y}{x} + x = C$;

з) $y = \sin Cx$.

11.2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f_1(x)f_2(y), \quad (11.6)$$

а также вида

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (11.7)$$

называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Метод их решения состоит в нахождении множителя для преобразования в уравнение с разделенными переменными. Для (11.6) это $\frac{dx}{f_2(y)}$, для (11.7) – $\frac{1}{Q_1(x)P_2(y)}$. Тогда уравнения запишутся так:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0.$$

Используя инвариантность формы дифференциала, получаем общие решения:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx, \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = C.$$

Но при умножении можно потерять решения, поэтому после получения общего решения необходимо проверить, являются ли нули функций $f_2(y)$, $Q_1(x)$, $P_2(y)$ решениями заданного уравнения и заключены ли они в общем интеграле при каком-то значении C .

Уравнения такого вида применяются в экономических исследованиях, например, определение спроса из эластичности спроса относительно цены –

$E_x(y) = \frac{x}{y} y'$; закон изменения производительности труда может быть выражен

дифференциальным уравнением первого порядка $\frac{1}{y(t)} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = f(t)$, и т.д.

Пример 11.8. Проинтегрировать уравнение $y' = -\frac{x}{y}$ ($y \neq 0$). Найти интегральную кривую, проходящую через точку $A(-4; 3)$.

Р е ш е н и е. Перепишем данное уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $x dx + y dy = 0$. Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными. Интегрируя, получаем $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$ или $x^2 + y^2 = 2C_1$. Пусть $2C_1 = C^2$ (так как $x^2 + y^2 \geq 0$), тогда общий интеграл уравнения запишется в виде $x^2 + y^2 = C^2$. Это семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом C . Найдем окружность, которая проходит через точку $A(-4; 3)$. Подставляя координаты точки в уравнение, получаем $(-4)^2 + 3^2 = C^2$, т.е. $C^2 = 25$ и $x^2 + y^2 = 25$ – искомая интегральная кривая.

Пример 11.9. Проинтегрировать уравнение $y' = -\frac{y}{x}$ ($x \neq 0$).

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$. Интегрируя, находим $\ln|x| + \ln|y| = C_1$. Постоянную C_1 можно представить в виде $C_1 = \ln|C|$ ($C \neq 0$). Подставляя C_1 в решение и преобразуя его, получим $\ln|xy| = \ln|C|$ ($C \neq 0$), т.е. $xy = C$ ($C \neq 0$). Разделяя переменные, предполагалось, что $y \neq 0$, следовательно, могло быть потеряно решение $y = 0$. Но оно может быть получено из общего интеграла при $C = 0$. Таким образом, общий интеграл выражается формулой $xy = C$ ($C \in R$).

Пример 11.10. Проинтегрировать уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 2y)$. Разделим переменные, для этого умножим данное уравнение на $\frac{dx}{y^2 + 2y}$. Получаем $\frac{dy}{y^2 + 2y} - x dx = 0$. Интегрируя, получаем $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| - \frac{x^2}{2} = C_1$ или $y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}$ (где $C = e^{2C_1}$) – общее решение. Так как уравнение умножалось на выражение $\frac{dx}{y^2 + 2y}$, то могли быть потеряны решения $y = 0$ и $y = -2$. Решение $y = 0$ получается из общего решения при $C = 0$, а $y = -2$ – при $C \rightarrow +\infty$, так как $y = \frac{2C}{e^{-x^2} - C} = \frac{2}{e^{-x^2}/C - 1} \rightarrow -2$ при $C \rightarrow +\infty$. Это частные решения.

Пример 11.11. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(xy^2 + x)dx + y(1 - x^2)dy = 0$.

Решение. Вынесем соответствующие множители за скобки, получим уравнение с разделяющимися переменными $x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0$. Разделив уравнение на $(y^2 + 1)(1 - x^2) \neq 0$, получим $\frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$. Интегрируя это уравнение, находим: $-\ln|1 - x^2| + \ln|1 + y^2| = \ln|C|$, $\ln|1 + y^2| = \ln|C(1 - x^2)|$.

Таким образом $1 + y^2 - C(1 - x^2) = 0$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Решения $x = \pm 1$ получаются из общего интеграла при $C \rightarrow +\infty$, так как $x^2 = 1 - \frac{1 + y^2}{C} \rightarrow 1$ при $C \rightarrow +\infty$. Это частные решения.

Пример 11.12. Проинтегрировать уравнение $y' = \frac{\sqrt{y-1}}{x}$.

Решение. Умножив данное уравнение на $\frac{dx}{\sqrt{y-1}}$, получим

$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, будем иметь $2\sqrt{y-1} - \ln|x| = C$ – общий интеграл в области $y \geq 1$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Есть решение $y = 1$, которое не получается из общего. Его называют *особым*.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 11.7 – 11.30 проинтегрировать уравнения, в отмеченных случаях найти частное решение.

11.7. $(x+2)dy - (y+1)dx = 0$.

11.8. $y' = e^{x-y}$.

11.9. $(x^2 - 1)y' = 2xy^2$.

11.10. $x^2 y' = 1 + \cos 2y$.

11.11. $y' = y^2 \cos x$.

11.12. $dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0$.

11.13. $\sqrt{1 - y^2} dx - y dy = 0$.

11.14. $\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

11.15. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

11.16. $y \sin x dx + \cos^6 x dy = 0$.

11.17. $y' = \frac{2xy}{3 + x^2}$; $y(3) = 12$.

11.18. $y' = \frac{\sin y}{1 + x^2}$; $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$11.19. y' = x^2 e^{-x^3}; \quad y(0) = 1.$$

$$11.20. xy' = y^2 + 1.$$

$$11.21. (x^2 + 9)ydy - x^2(y + 1)dx = 0.$$

$$11.22. 2x\sqrt{1 - y^2}dx + ydy = 0; \quad y(0) = 1.$$

$$11.23. (x + xy)dy + (y - xy)dx = 0.$$

$$11.24. (y^2 + 1)(x - 2)dx - \sqrt{x^2 - 4x}dy = 0.$$

$$11.25. 3x^2 ydx + 2\sqrt{9 - x^3}dy = 0.$$

$$11.26. e^{x+y}dx + ydy = 0.$$

$$11.27. xydy + \ln^2 xdx = 0.$$

$$11.28. y^2 e^{2x} y' + (1 + e^{2x})(\sqrt{y} + 1) = 0.$$

$$11.29. (1 + y)\sqrt{\arccos x}dx - y^2\sqrt{1 - x^2}dy = 0. \quad 11.30. xe^{-y}dy + \sqrt{1 - \ln^2 x}dx = 0.$$

11.31. Предположим, что все цены на товары, кроме одного, и доходы потребителей фиксированы, а эластичность спроса на товар относительно цены на данный товар выражена функцией $E_x(y) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$. Определить функцию спроса на данный товар.

11.32. Полные издержки K есть функция объема производства x . Найти функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений x равны средним издержкам.

11.33. Пусть темп изменения производительности труда характеризуется функцией $f(t)$. Определить функцию производительности труда $y = y(t)$, если:

$$а) f(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad y(0) = 1;$$

$$б) f(t) = \frac{1}{t \ln t}, \quad y(e) = 1.$$

11.3. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y) \quad (11.8)$$

называется *однородным*, если $z = f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени, т.е. при любом $t \neq 0$ выполняется тождество $f(tx, ty) = f(x, y)$. Аналогично дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (11.9)$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной степени, т.е.

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y).$$

Однородное уравнение можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (11.10)$$

следовательно, с помощью замены $y = xu$ ($u = y/x$, $y' = u + xu'$) оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $u(x)$:

$$u + xu' = \varphi(u), \quad x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

К однородным уравнениям сводятся уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (11.11)$$

для которого $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, преобразованием $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, где постоянные x_0 и y_0 являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

При $\Delta = 0$ уравнение (11.10) сводится к уравнению с разделяющимися переменными преобразованием $a_1x + b_1y = t$.

Пример 11.13. Проинтегрировать уравнение $2xyu' = y^2 - 4x^2$.

Решение. Уравнение однородное. Положим $y = xu$. Тогда

$$2x^2u(u + xu') = x^2u^2 - 4x^2, \quad \text{т. е.} \quad 2u^2 + 2xuu' = u^2 - 4, \quad 2xu \frac{du}{dx} = -(u^2 + 4) \quad \text{или}$$

$$\frac{2udu}{u^2 + 4} = -\frac{dx}{x}, \quad x \neq 0. \quad \text{Проинтегрировав, получим } \ln|u^2 + 4| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad \text{или} \quad C = x(u^2 + 4).$$

Подставив $u = \frac{y}{x}$, получим $C = x\left(\frac{y^2}{x^2} + 4\right)$ или $y^2 + 4x^2 - Cx = 0$ – общий интеграл.

При решении уравнения мы полагали, что $x \neq 0$. Но $x = 0$ – решение уравнения. Это частное решение. Оно может быть получено из общего интеграла $C_1(y^2 + 4x^2) = x$, где $C_1 = \frac{1}{C}$ при $C_1 = 0$.

Пример 11.14. Проинтегрировать однородное уравнение

$$(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0.$$

Решение. Пусть $y = xu$, тогда $dy = udx + xdu$. И уравнение (после сокращения на $x^4 \neq 0$) примет вид $(u^4 + u)dx - (1 - 2u^3)xdu = 0$ или

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - 2u^3)du}{u^4 + u}, \quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u} - \frac{3u^2}{1 + u^3}\right)du \quad (u \neq 0, u \neq -1).$$

Интегрируя, получаем $\ln|x| = \ln|u| - \ln|1+u^3| + \ln|C|$, откуда $x(1+u^3) = Cu$.

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получим $x^3 + y^3 = Cxy$ – общий интеграл.

При $u = -1$ получается решение $y = -x$. Это частное решение может быть получено из общего при $C = 0$. При $u = 0$ получаются решения $y = 0$, $x = 0$. Они могут быть получены из общего интеграла $C_1(x^3 + y^3) = xy$ при $C_1 = 0$.

Пример 11.15. Проинтегрировать уравнение

$$(2x+8)dx + (3y-5x-11)dy = 0.$$

Решение. Составляем систему:

$$\begin{cases} 2x+8=0, \\ 3y-5x-11=0. \end{cases}$$

Ее решение $x_0 = -4$, $y_0 = -3$. Делаем замену $x = X - 4$, $y = Y - 3$. Получаем

$$2XdX + (3Y - 5X)dY = 0 \text{ или } \frac{dY}{dX} + \frac{2X}{3Y - 5X} = 0 \text{ – однородное уравнение. Полагаем}$$

$$Y = Xu. \text{ Получается } X \frac{du}{dX} + \frac{2+3u^2-5u}{3u-5} = 0. \text{ Разделяем переменные}$$

$$\frac{3u-5}{3u^2-5u+2} du + \frac{dX}{X} = 0 \text{ и интегрируем } -2\ln|u-1| + 3\ln|3u-2| + \ln|CX| = 0 \text{ или}$$

$$C(3u-2)^3 X = (u-1)^2. \text{ Подставляя } u = \frac{Y}{X}, \text{ получим } C(3Y-2X)^3 = (Y-X)^2. \text{ Следова-$$

тельно, $C(3y-2x+1)^3 = (y-x-1)^2$ – общий интеграл исходного уравнения.

Решения $y = x+1$ и $y = \frac{2x-1}{3}$ (при $u=1$ и $u = \frac{2}{3}$ соответственно) являются частными, так как получаются из общего при $C=0$ и $C \rightarrow \infty$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 11.34 – 11.73 проинтегрировать уравнения, в отмеченных случаях найти частное решение.

11.34. $xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0.$

11.35. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$

11.36. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0.$

11.37. $xy' - y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0.$

11.38. $ydx - \left(x - y \operatorname{tg} \frac{x}{y}\right)dy = 0.$

11.39. $y' = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}.$

- 11.40. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0.$ 11.41. $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$
- 11.42. $xdy - (x + y)dx = 0, \quad y(1) = 2.$ 11.43. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx.$
- 11.44. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(-1) = 0.$ 11.45. $xdy - y \ln \frac{y}{x} dx = 0, \quad y(1) = 1.$
- 11.46. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x), \quad y(1) = e^2.$ 11.47. $(2xy + y^2) dx + (2xy + x^2) dy = 0.$
- 11.48. $y' = \frac{x - y}{x - 2y}.$ 11.49. $x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0.$
- 11.50. $xdy - \sqrt{x^2 - y^2} dx = ydx.$ 11.51. $(x + y) dx - (x - y) dy = 0.$
- 11.52. $(x^2 + y^2 + xy) dx = x^2 dy.$ 11.53. $(\sqrt{xy} - x) dy + ydx = 0, \quad y(1) = 1.$
- 11.54. $xdy - ydx = ydy.$ 11.55. $(x^2 + y^2) dx - 2x^2 dy = 0.$
- 11.56. $2x^2 y' - 4xy - y^2 = 0.$ 11.57. $y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}.$
- 11.58. $(x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0.$ 11.59. $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0.$
- 11.60. $(5xy - x^2) dy - 6y^2 dx = 0.$ 11.61. $xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}.$
- 11.62. $xy' = y \cos \left(\ln \frac{y}{x} \right).$ 11.63. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, \quad y(2) = \pi.$
- 11.64. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'.$ 11.65. $(12y - 5x - 8)y' - 5y + 2x + 3 = 0.$
- 11.66. $(x + y - 4) dx = (3x + 5y - 2) dy.$ 11.67. $(4x + y - 1) dx = (x + 3y - 3) dy.$
- 11.68. $(2x - 4y + 6) dx + (x + y - 3) dy = 0.$ 11.69. $(x + 2y + 1) dx + (3 - 2x) dy = 0.$
- 11.70. $(x - 2) dx + (y - 2x + 1) dy = 0.$ 11.71. $(6x + y - 1) dx + (4x + y - 2) dy = 0.$
- 11.72. $y' = \frac{2x + y + 3}{x + y - 4}.$ 11.73. $y' = 2 \left(\frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2.$

11.74. Пусть динамическая функция предложения товара имеет вид $F\left(x_t, p_t, \frac{dp_t}{dt}\right) = \frac{x_t}{p_t - \sqrt{x_t p_t}} \cdot \frac{dp_t}{dt}$, где x_t – запас товара, p_t – цена товара, $\frac{dp_t}{dt}$ – величина, характеризующая изменение цены. Определить, как изменяется цена товара в зависимости от его количества, если динамическая функция предложения товара равна скорости изменения запаса товара.

11.75. Определить функцию изменения цены товара в зависимости от его количества, если динамическая функция предложения товара $F\left(x_t, p_t, \frac{dp_t}{dt}\right) =$

$= \frac{x_t}{p_t} \cdot \frac{dp_t}{dt}$ пропорциональна скорости изменения запаса товара с коэффициентом пропорциональности, равным величине $1 + \ln p_t - \ln x_t$, при условии, что $p(1) = \frac{1}{e}$.

11.4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (11.12)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y), \quad (11.13)$$

называются *линейными*, (11.12) – относительно y , $\frac{dy}{dx}$, (11.13) – относительно x , $\frac{dx}{dy}$. Если $q(x) \equiv 0$ ($q(y) \equiv 0$), то уравнение называется *линейным однородным*, иначе – *линейным неоднородным*.

Линейное однородное – это уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение выражается формулой $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Для решения линейного неоднородного уравнения можно применять *метод вариации произвольной постоянной*, тогда общее решение неоднородного уравнения получается в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Линейное неоднородное уравнение может быть сведено к решению двух уравнений с разделяющимися переменными при помощи подстановки $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда уравнение (11.12) приводится к виду $u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)$. В качестве v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $v' + p(x)v = 0$ (частное решение), а функция u определяется из уравнения $u'v = q(x)$ (общее решение). Тогда $y(x) = u(x, C)v(x)$ даст общее решение исходного уравнения.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (11.14)$$

где α – действительное число. В случае $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение (11.14) является линейным. Во всех других случаях оно сводится к линейному при помощи подстановки $u = y^{1-\alpha}$, но его можно решать также подстановкой $y = uv$. Записав

уравнение в виде $u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)u^\alpha v^\alpha$, находим частное решение уравнения $v' + p(x)v = 0$ и общее решение уравнения $u' = q(x)u^\alpha v^{\alpha-1}$. Тогда $y(x) = u(x, C)v(x)$ даст общее решение уравнения Бернулли.

Пример 11.16. Решить уравнение $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$.

Решение. Для решения используем метод вариации произвольной постоянной. Для этого решим линейное однородное уравнение $y' + y \cos x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0, \quad \frac{dy}{y} + \cos x dx = 0, \quad \ln|y| + \sin x = \ln C, \text{ т. е. } y = Ce^{-\sin x}.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{-\sin x}$, тогда $y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x}$. Подставляя y и y' в уравнение, получаем $C'(x) = 1$, значит, $C(x) = x + C$. Следовательно, $y = (x + C)e^{-\sin x}$ – общее решение линейного неоднородного уравнения.

Пример 11.17. Найти общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$.

Решение. Решение будем искать в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение можно записать в виде $u(xv' - v) + xu'v = x^3$. Значит, $xv' - v = 0$, $v = x$ – частное решение, $x^2 u' = x^3$ или $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2} + C$ – общее решение. Следовательно, $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 11.18. Найти общий интеграл уравнения $\frac{dx}{dy} + \frac{3x}{y} + 4 = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным относительно $x, \frac{dx}{dy}$. Полагаем $x = uv$, тогда $\frac{dx}{dy} = u'v + uv'$, $u'v + u\left(v' + \frac{3v}{y}\right) + 4 = 0$, $v' + \frac{3v}{y} = 0$, $v = \frac{1}{y^3}$, $u' = 4y^3$, $u = y^4 + C$. Следовательно, $x = y + \frac{C}{y^3}$ – общий интеграл.

Пример 11.19. Найти решение уравнения $(x + y)y' = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(-1) = 0$.

Р е ш е н и е. Если рассматривать x как функцию от y , учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, то получим линейное уравнение $x' = x + y$. Пусть $x = uv$, $x' = u'v + uv'$, тогда $u'v + u(v' - v) = y$, $v' - v = 0$, $v = e^y$, $u'e^y = y$, $u = \int ye^{-y} dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C$. Значит, $x = Ce^y - y - 1$ – общее решение.

Подставляем начальные значения $-1 = C - 1$, $C = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $x = -y - 1$ или $y = -(x + 1)$.

Пример 11.20. Проинтегрировать уравнение $xy' + y = y^2(2x^3 + x)$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $y' + \frac{y}{x} = y^2(2x^2 + 1)$. Это уравнение Бернулли, $\alpha = 2$. Применим подстановку $u = y^{1-\alpha} = y^{-1}$. Тогда $y = \frac{1}{u}$, $y' = -\frac{u'}{u^2}$ и уравнение принимает вид $u' - \frac{u}{x} = -2x^2 - 1$. Это линейное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Однородное уравнение $u' - \frac{u}{x} = 0$ имеет решение $u = Cx$. Значит, решение неоднородного уравнения ищем в виде $u = C(x)x$. Тогда $u' = C'(x)x + C(x)$, $C'(x)x = -2x^2 - 1$, $C'(x) = -2x - \frac{1}{x}$, $C(x) = -x^2 - \ln|x| + C$. Значит, $u = -x^3 - x \ln|x| + Cx$ и $y = \frac{1}{Cx - x^3 - x \ln|x|}$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 11.21. Найти общий интеграл уравнения $xy'(x^2 \sin y - 1) + 2y = 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим это уравнение относительно $\frac{dx}{dy}$. Тогда $2y \frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y$. Это уравнение Бернулли. Пусть $x = uv$, тогда $\frac{dx}{dy} = u'v + uv'$, $2yu'v + u(2yv' - v) = -u^3v^3 \sin y$, $2yv' - v = 0$, $v^2 = y$, $2u' = -u^3 \sin y$, $u^2 = \frac{1}{C - \cos y}$. Следовательно, $x^2 = \frac{y}{C - \cos y}$ или $x^2 \cos y + y = Cx^2$ – общий интеграл.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 11.76 – 11.121 найти общее решение линейных дифференциальных уравнений, в отмеченных случаях найти частное решение.

$$11.76. \quad y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2.$$

$$11.77. \quad y' + \frac{x}{1-x^2} y = 1.$$

$$11.78. \quad y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}.$$

$$11.79. \quad y' \cos x + y \sin x = 1.$$

$$11.80. \quad y'x - y - x^2 = 0.$$

$$11.81. \quad y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 2x(x^2 + 1)$$

$$11.82. \quad y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$11.83. \quad y' - 4\frac{y}{x} = \frac{1}{x}.$$

$$11.84. \quad y' - 2y = e^{2x}.$$

$$11.85. \quad x(y' - y) = e^x.$$

$$11.86. \quad y' - 5y = e^{-5x}, \quad y(0) = -0,1.$$

$$11.87. \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$11.88. \quad xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}, \quad y(1) = 0.$$

$$11.89. \quad y' - \frac{y}{x} = xe^{x/2}.$$

$$11.90. \quad xy' - 2x^2y = \frac{e^{x^2}}{x + \frac{1}{x}}, \quad y(0) = 1.$$

$$11.91. \quad y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad y(0) = 2.$$

$$11.92. \quad y' + \frac{6xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^4}.$$

$$11.93. \quad x^2y' - y = x^2e^{x-1/x}.$$

$$11.94. \quad y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}, \quad y(\pi/2) = 1.$$

$$11.95. \quad y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1.$$

$$11.96. \quad y' \cos x - 2y \sin x = 2, \quad y(0) = 3.$$

$$11.97. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$11.98. \quad y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin x, \quad y(\pi/2) = 3.$$

$$11.99. \quad y' - \frac{xy}{1+x^2} = x.$$

$$11.100. \quad xy' + y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11.102. \quad y' \sin x \cos x = y + \sin^3 x.$$

$$11.101. \quad y' \sin x - y = 1 - \cos x, \quad y(\pi/2) = 1.$$

$$11.103. \quad y' \sin x + y = 1 + \cos x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

$$11.104. \quad y' + 3x^2y = \frac{e^x(3x^2+1)}{1+e^{x+x^3}}, \quad y(0) = 0.$$

$$11.105. \quad (xy' - 1) \ln x = 2y, \quad y(e) = 0.$$

$$11.106. \quad xy' + \frac{y}{\ln x} = \frac{x^2+5}{\ln x}.$$

$$11.107. \quad x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(e) = 1.$$

$$11.108. \quad y' + y = x + 2.$$

$$11.109. y' = 2x(x^2 + y)$$

$$11.110. y' + \frac{1-4x}{x^2} y = 3.$$

$$11.111. y' = x^2 + y.$$

$$11.112. (x + y^2)dy = ydx, y(0)=1.$$

$$11.113. yx' + x = 4y^3 + 3y^2, \quad y(2)=1.$$

$$11.114. y' = \frac{y}{3x - y^2}, \quad y(0)=1.$$

$$11.115. (2e^y - x)y' = 1, \quad y(0)=0.$$

$$11.116. x' + 2xy = \frac{y}{e^{y^2} + 3}.$$

$$11.117. \cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy, \quad y(0)=\pi/4.$$

$$11.118. (1 - 2xy)y' = y(y - 1), \quad y(0)=1.$$

$$11.119. (\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1, \quad y(0)=\pi/2.$$

$$11.120. (2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy, \quad y(0)=1. \quad 11.121. (x + y^2)dy + dx = 0.$$

В задачах 11.122 – 11.133 проинтегрировать уравнения Бернулли.

$$11.122. xy' + y = xy^2.$$

$$11.123. xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$$

$$11.124. xy' + y = y^2(2x^3 + x).$$

$$11.125. 2yy' + y^2 - x = 0.$$

$$11.126. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

$$11.127. xy' - y^2 \ln x = -y.$$

$$11.128. y' = x^3 y^3 - xy.$$

$$11.129. yy' + y^2 + 4x(x + 1) = 0.$$

$$11.130. y' + y = x\sqrt{y}.$$

$$11.131. x^2(x - 1)y' - y^2 - x(x - 2)y = 0.$$

$$11.132. yx' + x = -yx^2.$$

$$11.133. (2x^2 y \ln y - x)y' = y.$$

Простейшая модель воспроизводства национального дохода имеет вид $y(t) = B \frac{dy}{dt} + C(t)$, где B – коэффициент капиталоемкости национального дохода, т.е. отношение производственного накопления к приросту национального дохода; $C(t)$ – непроизводственное потребление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери.

11.134. Найти функцию, характеризующую изменение национального дохода $y = y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $B = 0,5$, $y(0) = 2$.

11.135. Найти функцию дохода $y = y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 4t$, коэффициент капиталоемкости $B = 0,25$, $y(0) = 4$.

11.136. Функция предложения промышленной продукции предприятия, являющаяся функцией цены предшествующего года, имеет вид $S = 3p - 8(t - 1) + 2\frac{dp}{dt}$. Спрос на данный товар определяется ценой на промышленную продукцию этого года, т.е. функция спроса имеет вид $q = -p + 7t - \frac{dp}{dt}$. Определить цену равновесия на товар (цену, при которой спрос равен предложению).

11.137. Цена товара А в начале года составляла 36 денежных единиц, а через t недель – $p(t)$. Спрос определяется уравнением $q = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt}$, а предложение – уравнением $S = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt}$, где q и S выражены в тыс. денежных единиц. Как должна изменяться цена товара, чтобы для каждого значения t равновесие сохранялось?

11.5. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальные уравнения вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (11.15)$$

где $a_i(x) (i = \overline{0, n})$, $f(x)$ – непрерывные на $(a; b)$ функции, $a_0(x) \equiv 0$, называется *линейным дифференциальным уравнением n -го порядка*. Оно всегда имеет общее решение, но нахождение его при $n \geq 2$ затруднительно. При $n = 2$ уравнение можно записать так:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (11.16)$$

При $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *линейным однородным*, при $f(x) \equiv 0$ – *неоднородным*. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (11.17)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – два линейно независимых частных решения.

Решения являются линейно независимыми, если их отношение – не постоянное число.

Для неоднородного линейного уравнения общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \phi(x), \quad (11.18)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ – два линейно независимых частных решения линейного однородного уравнения, соответствующего неоднородному; $\varphi(x)$ – частное решение неоднородного уравнения;

или

$$y = Y + \varphi(x),$$

где Y – общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному.

Все частные решения получаются из общего при фиксированных C_1, C_2 . Частное решение может быть задано начальными условиями (Коши) $x_0, y_0 = y(x_0), y'_0 = y'(x_0)$, где $x_0 \in (a; b), y_0, y'_0$ – произвольные.

Если $p(x) \equiv p, q(x) \equiv q$ – постоянные, то линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (11.19)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. Для нахождения $y_1(x), y_2(x)$ этого уравнения при $f(x) \equiv 0$ составляют квадратное уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, которое называется *характеристическим*. Для этого уравнения возможны три случая.

1. $D > 0$, корни уравнения λ_1, λ_2 вещественные различные. Общее решение однородного уравнения $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2. $D = 0$, корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ вещественные одинаковые. Общее решение однородного уравнения $y = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x)$.

3. $D < 0$, корни уравнения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($i = \sqrt{-1}$) комплексные. Общее решение однородного уравнения $y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$.

Пример 11.22. Проинтегрировать уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$ и найти частное решение, если $x_0 = 0, y_0 = 3, y'_0 = -5$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$. Значит, общее решение этого уравнения $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. Найдем производную $y' = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x}$.

Для нахождения частного решения подставляем в функцию и производную начальные условия, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - 3C_2 = -5. \end{cases}$$

Решая систему, получим $C_1 = 4, C_2 = -1$. Значит, частное решение $y = 4e^{-2x} - e^{-3x}$.

Пример 11.23. Найти общее решение уравнения $y'' - 12y' + 36y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0$. Уравнение имеет кратный корень $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 6$. Общее решение $y = e^{6x}(C_1 + C_2x)$.

Пример 11.24. Проинтегрировать уравнение $y'' + 6y' + 10y = 0$ и найти частное решение, если $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$. Здесь $D = 36 - 40 = -4 < 0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -3 \pm i$. Значит, $\alpha = -3, \beta = 1$. Общее решение $y = e^{-3x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. Найдем производную $y' = -3e^{-3x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{-3x}(C_1 \cos x - C_2 \sin x)$.

Для нахождения частного решения подставляем в функцию и производную начальные условия, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 = 2 \\ -3C_2 + C_1 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 7, C_2 = 2$. Значит, частное решение $y = e^{-3x}(7 \sin x + 2 \cos x)$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения можно применять метод вариации произвольных постоянных. Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

где y_1, y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения, относительно $C_1'(x), C_2'(x)$. Затем взять для каждой из полученных функций одну первообразную $C_{10}(x), C_{20}(x)$. Тогда частное решение дифференциального уравнения запишется $\varphi(x) = C_{10}(x)y_1(x) + C_{20}(x)y_2(x)$, а общее решение, согласно (11.18), запишется так:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_{10}(x)y_1(x) + C_{20}(x)y_2(x).$$

Пример 11.25. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

Решение. Линейно независимые частные решения однородного уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$: $y_1 = e^{-2x}, y_2 = xe^{-2x}$. Получаем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x^3}. \end{cases}$$

Находим: $C_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $C_{10}(x) = \frac{1}{x}$, $C_2'(x) = \frac{1}{x^3}$, $C_{20}(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Следовательно-

но, общее решение уравнения $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{x}e^{-2x} - \frac{1}{2x^2}xe^{-2x}$ или $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right)$.

Если функция $f(x)$ имеет специальный вид, т.е. является произведением показательной функции и многочлена либо произведением показательной функции, многочленов и тригонометрических функций, то существуют методы построения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Если $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}, \quad (11.20)$$

когда α не является корнем характеристического уравнения;

или вид

$$\varphi(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}, \quad (11.21)$$

когда α – простой корень характеристического уравнения;

или вид

$$\varphi(x) = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}, \quad (11.22)$$

когда α – кратный корень характеристического уравнения, где $Q_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin \beta x + Q_m(x)\cos \beta x)$, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}(\tilde{P}_l(x)\sin \beta x + \tilde{Q}_l(x)\cos \beta x), \quad (11.23)$$

когда $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения; или вид:

$$\varphi(x) = xe^{\alpha x}(\tilde{P}_l(x)\sin \beta x + \tilde{Q}_l(x)\cos \beta x), \quad (11.24)$$

когда $\alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения, где $\tilde{P}_l(x)$, $\tilde{Q}_l(x)$ – многочлен степени $l = \max(n, m)$ с неопределенными коэффициентами.

Если правая часть дифференциального уравнения является суммой двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частным решением уравнения является функция

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – частные решения уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и $y'' + py' + qy = f_2(x)$ соответственно.

Пример 11.26. Определить структуру частного решения дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Правая часть $f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} = 3xe^x$; $\alpha = 1$ – простой корень характеристического уравнения. В соответствии с формулой (11.21) частное решение имеет вид $\varphi(x) = xQ_1(x)e^x = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$.

Пример 11.27. Определить структуру частного решения дифференциального уравнения $y'' + 9y = \sin 3x + x \cos 3x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Правая часть $f(x) = P_0(x)\sin 3x + Q_1(x)\cos 3x$; множитель $e^{\alpha x}$ равен 1, значит $\alpha = 0$, $\beta = 3$; число $\alpha + i\beta = 3i$ является корнем характеристического уравнения. Согласно (11.24) частное решение имеет вид $\varphi(x) = x(\tilde{P}_1(x)\sin 3x + \tilde{Q}_1(x)\cos 3x) = (Ax^2 + Bx)\sin 3x + (Cx^2 + Dx)\cos 3x$.

Пример 11.28. Проинтегрировать уравнение $y'' - 9y = 18x^2 + 5$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$.

Находим частное решение исходного уравнения. В данном случае правая часть является многочленом второй степени $f(x) = P_2(x) = 18x^2 + 5$; множитель $e^{\alpha x}$ равен 1, значит $\alpha = 0$ – не является корнем характеристического уравнения.

В соответствии с формулой (11.20) частное решение имеет вид $\varphi(x) = Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя выражения для $\varphi(x)$, $\varphi'(x) = 2Ax + B$, $\varphi''(x) = 2A$ в данное уравнение, получаем: $2A - 9(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 + 5$, или $-9Ax^2 - 9Bx + 2A - 9C = 18x^2 + 5$.

Так как $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x , т.е. является тождеством. Поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x , стоящие в разных частях, равны между

собой:
$$\begin{cases} -9A = 18 \\ -9B = 0 \\ 2A - 9C = 5. \end{cases}$$
 Из полученной системы уравнений находим, что

$A = -2, B = 0, C = -1$, поэтому $\varphi(x) = -2x^2 - 1$ – частное решение неоднородного уравнения.

Значит, общее решение неоднородного уравнения $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - 2x^2 - 1$.

Пример 11.29. Проинтегрировать уравнение $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Находим частное решение исходного уравнения. В данном случае правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} P_0(x) = 6e^{2x}$, значит $\alpha = 2$ – не является корнем характеристического уравнения.

В соответствии с формулой (11.20) частное решение имеет вид $\varphi(x) = e^{2x} Q_0(x) = Ae^{2x}$. Подставляя выражения для $\varphi(x)$, $\varphi'(x) = 2Ae^{2x}$, $\varphi''(x) = 4Ae^{2x}$ в данное уравнение, получаем: $4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 6e^{2x}$, т.е. $2Ae^{2x} = 6e^{2x}$.

Так как $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x , т.е. является тождеством. Следовательно, $A = 3$. Поэтому $\varphi(x) = 3e^{2x}$ – частное решение неоднородного уравнения, а общее решение $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{2x}$.

Пример 11.30. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 16\sin 2x + 24\cos 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ имеет кратный корень $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$.

Находим частное решение исходного уравнения. В данном случае правая часть имеет вид $f(x) = P_0(x) \sin \beta x + Q_0(x) \cos \beta x = 16\sin 2x + 24\cos 2x$, множитель $e^{\alpha x}$ равен 1, значит, $\alpha = 0, \beta = 2$, число $\alpha + i\beta = 2i$ не является корнем характеристического уравнения.

В соответствии с формулой (11.22) частное решение имеет вид $\varphi(x) = \tilde{P}_0(x) \sin 2x + \tilde{Q}_0(x) \cos 2x = A \sin 2x + B \cos 2x$. Подставляя выражения для

$\varphi(x)$, $\varphi'(x) = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$, $\varphi''(x) = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$ в данное уравнение, получаем:

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 8A \cos 2x - 8B \sin 2x + 4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 16 \sin 2x + 24 \cos 2x, \text{ т.е. } 8A \cos 2x - 8B \sin 2x = 16 \sin 2x + 24 \cos 2x.$$

Так как $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x , т.е. является тождеством. Следовательно, $8A = 24$, $-8B = 16$. Значит, $A = 3$, $B = -2$. Поэтому $\varphi(x) = 3 \sin 2x - 2 \cos 2x$ – частное решение неоднородного уравнения, а общее решение $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + 3 \sin 2x - 2 \cos 2x$.

Пример 11.31. Проинтегрировать уравнение $y'' - 7y' + 12y = 8xe^{3x} + 12e^x$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ имеет различные корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Находим частное решение исходного уравнения. В данном случае правая часть является суммой двух функций

$$f_1(x) = e^{\alpha x} P_1(x) = 8xe^{3x}, \quad f_2(x) = e^{\alpha x} P_0(x) = 12e^x.$$

Рассмотрим первую функцию $f_1(x) = e^{\alpha x} P_1(x) = 8xe^{3x}$, $\alpha = 3$ является простым корнем характеристического уравнения.

В соответствии с формулой (11.21) частное решение уравнения $y'' - 7y' + 12y = 8xe^{3x}$ имеет вид $\varphi_1(x) = xe^{3x} Q_1(x) = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$. Подставляя выражения для $\varphi_1(x)$, $\varphi_1'(x) = e^{3x}(3Ax^2 + (3B + 2A)x + B)$, $\varphi_1''(x) = e^{3x}(9Ax^2 + (9B + 12A)x + 6B + 2A)$ в данное уравнение, получаем: $e^{3x}(9Ax^2 + (9B + 12A)x + 6B + 2A) - 7e^{3x}(3Ax^2 + (3B + 2A)x + B) + 12e^{3x}(Ax^2 + Bx) = 8xe^{3x}$, $e^{3x}(-2Ax - B + 2A) = 8xe^{3x}$. Значит, $-2A = 8$, $-B + 2A = 0$, т.е. $A = -4$, $B = -8$. Следовательно, $\varphi_1(x) = e^{3x}(-4x^2 - 8x) = -4e^{3x}(x^2 + 2x)$.

Рассмотрим вторую функцию $f_2(x) = e^{\alpha x} P_0(x) = 12e^x$, $\alpha = 1$ – не является корнем характеристического уравнения.

В соответствии с формулой (11.20) частное решение уравнения $y'' - 7y' + 12y = 12e^x$ имеет вид: $\varphi_2(x) = e^x Q_0(x) = Ae^x$. Подставляя выражения для $\varphi_2(x)$, $\varphi_2'(x) = Ae^x$, $\varphi_2''(x) = Ae^x$ в данное уравнение, получаем: $Ae^x - 7Ae^x + 12Ae^x = 12e^x$, $6Ae^x = 12e^x$. Значит, $6A = 12$, т.е. $A = 2$. Следовательно,

но, $\varphi_2(x) = 2e^x$. Частное решение исходного уравнения равно сумме двух найденных, т.е. $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = -4e^{3x}(x^2 + 2x) + 2e^x$.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - 4e^{3x}(x^2 + 2x) + 2e^x$.

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, т.е. значения постоянных C_1 и C_2 :

$$y(0) = 0: C_1 + C_2 + 2 = 0.$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x} - 12e^{3x}(x^2 + 2x) - 4e^{3x}(2x + 2) + 2e^x,$$

$$y'(0) = 2: 3C_1 + 4C_2 - 6 = 2.$$

Получилась система $\begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ 3C_1 + 4C_2 = 8 \end{cases}$, из которой $C_1 = -16$, $C_2 = 14$.

Следовательно, частное решение $y = -16e^{3x} + 14e^{4x} - 4e^{3x}(x^2 + 2x) + 2e^x$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 11.138 – 11.167 найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

11.138. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

11.139. $y'' + 2y' - 8y = 0$.

11.140. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

11.141. $y'' - 16y = 0$.

11.142. $y'' - y' - 90y = 0$.

11.143. $y'' + 4y' - 21y = 0$.

11.144. $y'' + 12y' + 35y = 0$.

11.145. $y'' - 13y' + 36y = 0$.

11.146. $y'' - 2y' + y = 0$.

11.147. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

11.148. $y'' + 6y' + 25y = 0$.

11.149. $y'' + 9y = 0$.

11.150. $16y'' + y = 0$.

11.151. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

11.152. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

11.153. $y'' - 4y' = 0$.

11.154. $y'' + 20y' + 100y = 0$.

11.155. $16y'' + 8y' + y = 0$.

11.156. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

11.157. $25y'' - 10y' + y = 0$.

11.158. $y'' - 14y' + 49y = 0$.

11.159. $49y'' + 14y' + y = 0$.

11.160. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

11.161. $y'' + y' + y = 0$.

11.162. $y'' + 3y' = 0$.

11.163. $y'' + 4y = 0$.

11.164. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

11.165. $y'' - y' - 2y = 0$.

11.166. $y'' + 2y' + 17y = 0$.

11.167. $y'' - 6y' + 10y = 0$.

В задачах 11.168 – 11.178 проинтегрировать уравнения методом вариации произвольных постоянных.

$$11.168. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$11.170. y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}.$$

$$11.172. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$11.174. y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

$$11.176. y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}.$$

$$11.177. y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}.$$

$$11.169. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$11.171. y'' - y' = e^{2x} \operatorname{cose}^x.$$

$$11.173. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$11.175. y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

$$11.178. y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

В задачах 11.179 – 11.192 записать структуру частного решения неоднородного уравнения.

$$11.179. 3y'' - 10y' + 3y = 2\cos 3x - \sin 3x.$$

$$11.181. 5y'' + 9y' - 2y = x^3 - 2x.$$

$$11.183. y'' + 49y = x^3 + 4x.$$

$$11.185. 2y'' - 7y' + 3y = (2x + 1)e^{3x}.$$

$$11.187. y'' - 4y' + 5y = x\cos 2x - \sin 2x.$$

$$11.189. y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + 2e^x.$$

$$11.191. y'' + 36y = 2x\sin 6x + \cos 6x.$$

$$11.180. y'' - 4y' = 3\cos 4x.$$

$$11.182. y'' - y' + y = e^x \cos x.$$

$$11.184. y'' - 3y' = 2x^2 - 5x.$$

$$11.186. 5y'' - 6y' + y = x^2 e^x.$$

$$11.188. y'' - 8y' + 16y = 2xe^{4x}.$$

$$11.190. y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin x.$$

$$11.192. y'' - 3y' + 2y = x + 7e^x.$$

В задачах 11.193 – 11.218 найти общие решения неоднородных уравнений.

$$11.193. y'' + 2y' - 8y = 16x.$$

$$11.195. y'' - 3y' - 4y = 8x^2 - 1.$$

$$11.197. y'' + 2y' + 10y = -10x^2 + 6x.$$

$$11.199. y'' - 9y' + 14y = 5e^{2x}.$$

$$11.201. y'' + 4y' + 4y = 18e^x.$$

$$11.203. y'' - 4y' + 3y = 3xe^{2x}.$$

$$11.205. y'' + 2y' + 2y = 5\sin x.$$

$$11.207. y'' + 2y' - 8y = 17\sin x + 34\cos x.$$

$$11.209. y'' + 2y' + 10y = -13\sin 2x.$$

$$11.211. y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x.$$

$$11.213. y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x.$$

$$11.215. y'' + 6y' + 8y = 24e^{2x} + 16x^2 + 2.$$

$$11.217. y'' + y = 2e^x + 4\cos x.$$

$$11.194. y'' - 4y = 12x.$$

$$11.196. y'' + y' = 4x^3.$$

$$11.198. y'' + y' - 2y = 4e^{-x}.$$

$$11.200. y'' - 5y' + 4y = 6e^x.$$

$$11.202. y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$$

$$11.204. y'' + y' - 6y = e^{2x}(15x^2 - 4x + 3).$$

$$11.206. y'' - 5y' + 6y = 2\cos x.$$

$$11.208. y'' + 6y' + 25y = 39\sin 2x.$$

$$11.210. y'' - 6y' + 9y = 36\cos 3x.$$

$$11.212. y'' + 9y = 2\sin 3x + 12x\cos 3x.$$

$$11.214. y'' - 2y' + 2y = 4xe^x \sin x.$$

$$11.216. y'' - y' = 3x^2 - 12e^{3x}.$$

$$11.218. y'' + y = 2\sin x + 9\cos 2x.$$

В задачах 11.219 – 11.227 найти решения, удовлетворяющие начальным условиям.

11.219. $y'' + y = x$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 0$.

11.220. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

11.221. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

11.222. $y'' - 2y' + y = -9\sin 2x - 12\cos 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

11.223. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$.

11.224. $y'' - y = e^{2x} \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

11.225. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x - (36x - 12)\cos 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

11.226. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

11.227. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

11.6. Контрольные задания к главе 11

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $xe^{x+3y} dy = x dx$.

2. $\frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y} dy = 0$.

3. $y' \sqrt{1+y^2} = \frac{x^2}{y}$.

4. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

5. $(xy + x^3 y)y' = 1 + y^2$.

6. $y' + y + y^2 = 0$.

7. $y' \cos^3 y - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$.

8. $xy^3 + x + (x^2 y^2 - y^2)y' = 0$.

9. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.

10. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

11. $(x + 4)dy - xydx = 0$.

12. $y^2 \ln x dx - (y - 1)xdy = 0$.

13. $y' + 2y - y^2 = 0$.

14. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0$.

15. $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$.

2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$.

2. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

4. $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$.

5. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$.

6. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$.

7. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

8. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$.

9. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, \quad y(0)=0.$ 10. $xy' - 2y + x^2 = 0, \quad y(1)=0.$
 11. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x, \quad y(\sqrt{2})=1.$ 12. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}, \quad y(1)=-\frac{1}{2e}.$
 13. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x, \quad y(0)=0.$
 14. $x dy = (x^4 - 2y) dx, \quad y(1)=0.$ 15. $x^3 y' + x^2 y + x + 1 = 0, \quad y(1)=0.$

3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0.$ 2. $y^2 + x^2 y' = xy y'.$
 3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$ 4. $(y + \sqrt{xy})dx = x dy.$
 5. $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}.$ 6. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$
 7. $(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0.$ 8. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$
 9. $xy' + y \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0.$ 10. $(x+2y)dx + x dy = 0.$
 11. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$ 12. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$
 13. $y' - \frac{y}{x} - \frac{1}{\sin(y/x)} = 0.$ 14. $(x-y)y dx - x^2 dy = 0.$
 15. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)dx + (x^2 + 4xy)dy = 0.$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 5y' + 6y = 72x, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0.$
 2. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$
 3. $2y'' - y' = 1 + 2x, \quad y(0)=7, \quad y'(0)=0.$
 4. $y'' - 4y = 2 - 8x, \quad y(0)=5,5, \quad y'(0)=6.$
 5. $y'' - y = \cos 2x, \quad y(0)=-0,2, \quad y'(0)=2.$
 6. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2.$
 7. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$
 8. $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
 9. $y'' + y = \cos 3x, \quad y(\pi/2)=4, \quad y'(\pi/2)=-3/8.$
 10. $y'' - y = e^{2x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$
 11. $y'' - 4y = 3xe^{-x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3.$
 12. $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=4/3.$
 13. $y'' - 2y' + 2y = 2x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$
 14. $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$
 15. $y'' + 6y' + 8y = 8x^2 + 4x + 12, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

Раздел VI

РЯДЫ

Глава 12. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

12.1. Числовой ряд и его сходимость

Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (12.1)$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots$ называются *членами ряда*. a_1 – первый член, a_2 – второй член, a_3 – третий член и т.д. Член a_n ряда, стоящий на n -ом месте, называется *n -ым членом* или *общим членом* ряда. Ряд (12.1) считается заданным, если известен его общий член.

Пример 12.1. Написать четыре первых члена ряда, если задан его общий член $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$.

Р е ш е н и е. Если $n=1$, то $a_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{5}$. Если $n=2$, то $a_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{2 \cdot 2 + 3} = -\frac{1}{7}$. Если $n=3$, то $a_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{2 \cdot 3 + 3} = \frac{1}{9}$. Если $n=4$, то $a_4 = \frac{(-1)^{4-1}}{2 \cdot 4 + 3} = -\frac{1}{11}$. Следовательно, $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$.

Если задан ряд (12.1), то можно составить последовательность сумм $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; ...; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$; ..., которые называются *частичными* или *частными суммами ряда*. Сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (12.2)$$

называется *n -ой частичной суммой*.

Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся*, а число S называется *суммой ряда*.

да и пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, в противном случае ряд называется *расходящимся*.

Разность r_n между его суммой S и частичной суммой S_n

$$r_n = S - S_n \quad (12.3)$$

называют остатком ряда (12.1) после n -го члена или n -ым остатком ряда. По-
дробнее, $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$. Тогда

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k} + \dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m.$$

Теорема. Для того, чтобы ряд (12.1) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0. \quad (12.4)$$

Свойства сходящихся рядов

1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то будет сходиться также

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, где c – любое действительное число, а его сумма будет равна cS .

3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, причем сумма вновь образованного ряда равна сумме или разности исходных рядов, т.е.

если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm S_0$.

Пример 12.2. Исследуем вопрос о сходимости ряда по определению

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Решение. Составим частичную сумму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Преобразуем общий член ряда $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots; \\ S_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 12.3. Изучим вопрос о сходимости ряда, составленного из членов геометрической прогрессии. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a_1 , $a_1 \neq 0$, вида

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}, \quad (12.5)$$

в дальнейшем для простоты будем называть рядом геометрической прогрессии.

Решение. Частичная сумма ряда $S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1 - q}$, $a_1 \neq 0$, $q \neq 1$.

Рассмотрим 4 случая.

1. Пусть $|q| < 1$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{1 - q} - a_1 \frac{q^n}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q},$$

т.е. ряд сходится и его сумма $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

2. Пусть $|q| > 1$, тогда $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $S_n \rightarrow \infty$. Поэтому ряд расходится и суммы не имеет.

3. Пусть $q = 1$, тогда ряд принимает вид $a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 + \dots$. Тогда $S_n = na_1$, при $n \rightarrow \infty$ $S_n \rightarrow \infty$. Значит, ряд расходится.

4. Пусть $q = -1$, тогда ряд принимает вид $a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \dots + (-1)^{n-1}a_1 + \dots$. Его частичные суммы попеременно будут равны то 0, то a_1 , в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным числом. Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ частичные суммы S_n не стремятся ни к какому пределу. Ряд расходится.

Таким образом, ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = \begin{cases} \frac{a_1}{1 - q}, & \text{если } |q| < 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } |q| \geq 1 \end{cases}. \quad (12.6)$$

Гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (12.7)$$

называется *гармоническим*. Можно строго доказать, что он расходится.

Обобщенный гармонический ряд, или ряд, Дирихле –
это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad (12.8)$$

где α – любое действительное число.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \leq 1 \end{cases}. \quad (12.9)$$

Например, если $\alpha = 1$ – это гармонический ряд, который расходится.

Если $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, то получаем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Если α равно, например 2, то получаем сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots, \text{ так как } \alpha = 2 > 1.$$

Необходимый признак сходимости

Если ряд сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (12.10)$$

Необходимый признак сходимости не является достаточным. Выполнение условия (12.10) еще не означает сходимость ряда. Так, например, для расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ выполняется. Дей-

ствительно, $a_n = \frac{1}{n}$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Однако если условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ нарушается, то ряд расходится.

Следствие. (Достаточный признак расходимости ряда).

Если общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \quad (12.11)$$

то ряд расходится.

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{2n+14}$ его общий член $a_n = \frac{3n+7}{2n+14}$, при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+7}{2n+14} = \frac{3}{2} \neq 0. \text{ Значит, ряд расходится.}$$

Пример 12.4. Исследовать сходимость ряда $1 + \frac{8}{4} + \frac{27}{7} + \frac{64}{10} + \dots$.

Решение. Обозначим общий член ряда U_n . Определим формулу общего члена ряда. Рассмотрим последовательности числителей. Числители дробей, членов ряда, можно представить в виде $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$ и т.д., т.е. показатель степени каждого члена равен трем, а основание степени совпадает с номером этого члена. Тогда общий член последовательности числителей $b_n = n^3$. Знаменатели дробей $1, 4, 7, 10, \dots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 3$, поэтому общий член арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 3(n-1) = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

Общий член ряда $U_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{n^3}{3n-2}$. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n-2} = \infty$. Необходимый признак не выполняется. Ряд расходится.

Пример 12.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Вычислим

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Необходимый признак не выполняется. Ряд расходится.

Пример 12.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{2 \ln n + 1}$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{\ln(n+2)}{2 \ln n + 1}$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{2 \ln n + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для вычисления предела отношения

двух бесконечно больших функций натурального аргумента правило Лопиталья непосредственно применить нельзя, так как для таких функций не определено понятие производной. Чтобы вычислить предел a_n такого выражения, обозна-

чим его $f(n)$ и заменим более общим выражением $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{2 \ln x + 1}$, $x \rightarrow +\infty$.

Здесь дискретный аргумент n заменен непрерывным аргументом x . Доказано, что если существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ конечный или бесконечный $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

тоже существует и равен $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, поэтому вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{2 \ln x + 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+2))'}{(2 \ln x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2(x+2)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(x+2)'} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \text{ Тогда}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$. Необходимый признак не выполняется. Ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Дан общий член ряда. Написать первые четыре члена ряда.

а) $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n!}$.

12.2. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их сумму.

12.3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \dots$

12.4. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$

12.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{6^n}$. **12.6.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$. **12.7.** $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \dots$

Исследовать сходимость ряда, используя следствие из необходимого признака сходимости.

12.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{n+1}$.

12.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n$.

12.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{5n+3}$.

12.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$.

12.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+5}$.

12.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5n+5}$.

12.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{2n+3n^2}$.

12.2. Исследование сходимости рядов с положительными членами.

Признаки сравнения

Ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (12.12)$$

называется положительным, если все его члены положительны, т.е. $a_n > 0$, и неотрицательным, если $a_n \geq 0$.

Первый признак сравнения

Пусть даны два неотрицательных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \geq 0$, причем $a_n \leq b_n$ для всех n . Тогда:

- 1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- 2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй признак сравнения (признак сравнения в предельной форме).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n > 0, b_n > 0$ ряды с положительными членами и существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \neq 0, l \neq \infty),$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 12.7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2}$.

Решение. Запишем ряд в виде $\frac{1}{7} + \frac{1}{27} + \frac{1}{127} + \dots + \frac{1}{5^n + 2}$. Сравним члены данного ряда с членами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, который запишем в виде $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots$; $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{27} < \frac{1}{25}$, $\frac{1}{127} < \frac{1}{125}$, ..., $\frac{1}{5^n + 2} < \frac{1}{5^n}$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (знаменатель $q = \frac{1}{5} < 1$). Следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2}$ по первому признаку сравнения тоже сходится.

Пример 12.8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}$.

Решение. Запишем ряд в виде $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{4n-3}$ и сравним его с гармоническим рядом $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$. $1 \geq 1$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$, $\frac{1}{4} > \frac{1}{13}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{17}$, ..., $\frac{1}{n} > \frac{1}{4n-3}$, ... Гармонический ряд расходится, поэтому расходится и данный ряд по первому признаку сравнения.

Пример 12.9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2}$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{3n+1}{n^2}$. Для больших n общий член ряда $\frac{3n+1}{n^2} \approx \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$. Поэтому сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, применив второй признак сравнения. Итак, $a_n = \frac{3n+1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n^2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3 \neq 0$. Мы сравнивали исходный ряд с расходящимся рядом. По второму признаку сравнения данный ряд расходится.

Пример 12.10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2+n^3}$.

Решение. $a_n = \frac{n}{2+n^3}$. Для сравнения возьмем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Для больших n $a_n = \frac{n}{2+n^3} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2 > 1$. Положим $b_n = \frac{1}{n^2}$. Применяя второй признак сравнения, вычислим предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2+n^3} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2+n^3} = 1 \neq 0$.

Мы сравнивали данный ряд со сходящимся рядом. По второму признаку сравнения данный ряд сходится.

Пример 12.11. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2^n}{3^n}$.

Решение. Применим второй признак сравнения. В этом примере $a_n = \frac{5+2^n}{3^n}$. Для больших n $a_n = \frac{5+2^n}{3^n} \approx \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Поэтому сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Это ряд геометрической прогрессии со знаменателем

$q = \frac{2}{3} < 1$ и, значит, сходится. Обозначим n -й член этого ряда $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+2^n}{3^n} : \frac{2^n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5+2^n)3^n}{3^n 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+2^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2^n} + 1 \right) = 1 \neq 0.$$

Мы сравнивали исходный ряд со сходящимся рядом. Поэтому исходный ряд по второму признаку сравнения сходится.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью признаков сравнения.

$$\begin{array}{llll} 12.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}. & 12.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+4}. & 12.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3+5^{2n}}. & 12.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}. \\ 12.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^4+1}. & 12.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n+2}}. & 12.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}. & 12.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}. \end{array}$$

12.3. Признак сходимости Даламбера и Коши.

Интегральный признак сходимости

Признак Даламбера

Если для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ – расходится. В случае $l = 1$ признак вопрос о сходимости ряда не решает. В этом случае следует применять другие признаки.

Пример 12.12. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.

Решение. Символ $n!$ означает произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Считается, что $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ и т.д. Применим признак Даламбера: $a_n = \frac{2^{n+1}}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{n+1!}$ и, следовательно, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+2} n!}{(n+1)! 2^n} = \frac{2}{n+1}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. По признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 12.13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера.

Решение. Применяя признак Даламбера, получаем $a_n = \frac{n^n}{n!}$,

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1. \text{ Ряд расходится.}$$

Пример 12.14. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+5}}$.

Решение. Исследуя по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+5}}$, получаем:

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n+5}}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{\sqrt{2n+7}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{\sqrt{2n+7}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)}{(n+1)} \sqrt{\frac{2n+5}{2n+7}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{2n+7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{7}{n}}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Предел $l = 1$, признак Даламбера вопрос о сходимости этого ряда не решает. Но в данном случае ряд расходится, так как нарушается необходимый признак сходимости ряда, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+5}} = \infty$ и не равен нулю.

Пример 12.15. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{\sqrt{3n+2}}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Так как $a_n = \frac{7^n}{\sqrt{3n+2}}$,

$$a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7^{n+1}}{\sqrt{3n+5}} : \frac{7^n}{\sqrt{3n+2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} \sqrt{3n+2}}{7^n \sqrt{3n+5}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 \sqrt{3n+2}}{\sqrt{3n+5}} = 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+2}{3n+5}} = 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{5}{n}}} = 7 \cdot 1 = 7 > 1. \text{ По признаку Далам-}$$

бера ряд расходится.

Пример 12.16. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} : \frac{n^n}{(2n)!} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{n^n (2n+2)!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{(n+1)1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)2} \right) = 0 < 1. \text{ По признаку Даламбера ряд сходится.}$$

Признак Коши

Если для ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ существует пре-

дел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится.

При $l = 1$, как и в случае признака Даламбера, вопрос о сходимости остается нерешенным.

На практике признак Коши удобно применять, когда извлекается корень n -ой степени из общего члена a_n ряда.

Пример 12.17. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+2}{n} \right)^n$ по признаку Коши.

Решение. Имеем $a_n = 2^n \left(\frac{n+2}{n} \right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n+2}{n} \right)^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n+2}{n} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 2 \cdot 1 = 2 > 1. \text{ Ряд расходится по признаку Коши.}$$

Пример 12.18. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$.

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{5^n}{n^n} = \left(\frac{5}{n}\right)^n$. Здесь удобно применить

признак Коши, так как $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{5}{n}\right)^n} = \frac{5}{n}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0 < 1$. Следовательно, ряд сходится.

Пример 12.19. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n n$.

Решение. Применим признак Коши. Общий член ряда $a_n = \arctg^n n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arctg^n n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg n = \frac{\pi}{2} > 1$. По признаку Коши ряд расходится.

Интегральный признак сходимости Коши–Маклорена

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и убывают, т.е. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots >$

$> a_n > \dots$, и пусть $f(x)$ непрерывная, положительная убывающая функция, определенная для $x \geq 1$ и такая, что $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$,

тогда $\int_1^{\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 12.20. Исследуем вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in R$.

Решение. Применим интегральный признак сходимости, тогда

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Рассмотрим

несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha}$.

1. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (B^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

2. Если $\alpha = 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (\ln B - \ln 1) = +\infty$.

Ряд расходится. Тогда несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1; \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому и ряд, который является рядом Дирихле или обобщенным гармониче-

ским $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1; \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Пример 12.21. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Она удовле-

творяет условиям интегрального признака сходимости, поэтому, применяя признак, рассмотрим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \right) \Big|_1^B = - \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln(B+1)} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл сходится. Значит, сходится и ряд.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера.

$$\begin{array}{llll} 12.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n} & 12.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}3^n} & 12.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} & 12.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \\ 12.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} & 12.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & 12.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{n+1}(n+1)!} & 12.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} \end{array}$$

Исследовать сходимость ряда по признаку Коши.

$$12.31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad 12.32. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad 12.33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

$$12.34. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{n}.$$

$$12.35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

$$12.36. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{3n^2 + n + 1} \right)^n.$$

$$12.37. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4}{n + 1} \right)^n.$$

$$12.38. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n} \right)^n.$$

$$12.39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}.$$

$$12.40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}}.$$

$$12.41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}}.$$

$$12.42. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+2} \right)^n.$$

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака.

$$12.43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}.$$

$$12.44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}.$$

$$12.45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

$$12.46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}.$$

12.4. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Знакопередающиеся ряды.

Признак Лейбница

Будем рассматривать ряды с членами произвольных знаков. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (12.13)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из абсолютных величин его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (12.14)$$

Теорема. Из сходимости ряда из абсолютных величин (12.14) следует сходимость исходного ряда (12.13).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, в то время как ряд, составленный из абсолютных величин его членов (12.14), расходится.

Пример 12.22. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ на абсолютную и условную сходимость.

Р е ш е н и е. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ сходится абсолютно,

так как соответствующий ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд

Дирихле, при $\alpha = 2 > 1$ является сходящимся.

Назовем *знакопередающим* ряд вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$, где $u_n > 0$, т.е. ряд, в котором члены попеременно меняют знак. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ знакопередающий.

Признак Лейбница

Если члены знакопередающегося ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad u_n > 0 \quad (12.15)$$

убывают по абсолютной величине $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots u_{n-1} > u_n > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма S положительна и не превосходит первого члена, т.е. $S \leq u_1$.

Пример 12.23. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Р е ш е н и е. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится в

силу признака Лейбница, так как 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

В то же время ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, является гармоническим, т.е. расходящимся. Значит, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ сходится условно.

Заметим, что знакопередающиеся ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются рядами Лейбница, или рядами лейбницевого типа.

Следствие. Остаток ряда Лейбница имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т.е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Действительно, если сумму S сходящегося ряда (12.7) представить как сумму $S = S_n + r_n$, где r_n – n -ый остаток ряда.

Подробнее
$$S = \underbrace{u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n}_{S_n} + \underbrace{(-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \dots}_{r_n}.$$

Рассмотрим теперь $r_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$. Остаток ряда представляет собой новый знакопередающийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, поэтому его сумма $|r_n| < u_{n+1}$, где u_{n+1} – абсолютная величина первого из отброшенных членов.

Пример 12.24. Найти приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n+1)!}$ с точностью до 0,001.

Решение. Запишем ряд в развернутом виде.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5!} + \frac{1}{3 \cdot 7!} - \frac{1}{4 \cdot 9!} + \dots$$

Ряд знакопередающийся лейбницевского типа. Он

сходится и имеет сумму $S < \frac{1}{3}$. Для того, чтобы найти сумму ряда приближенно с заданной точностью, надо определить число n , равное количеству первых n членов ряда, которые надо оставить, чтобы заменить сумму ряда S его частичной суммой S_n , а остальные члены отбросить, оценив сумму отброшенных членов r_n . Для ряда Лейбница $|r_n| < u_{n+1}$ (*). По условию $|r_n| < 0,001$. Запишем, учитывая оценку (*), более сильное неравенство: $u_{n+1} < 0,001$. Ищем член ряда, значение которого по абсолютной величине меньше заданной точности. Отбрасываем все члены ряда, начиная с него. Все предыдущие члены ряда суммируем. Их количество и есть искомое число n , и частичная сумма S_n представляет приближенную сумму ряда с заданной точностью.

В нашем случае

$$u_1 = \frac{1}{3} = 0,33334, \quad u_2 = \frac{1}{240} = 0,00417, \quad u_3 = \frac{1}{15120} = 0,00006 < 0,001.$$

Третий член меньше по абсолютной величине 0,001, поэтому, начиная с него, все остальные члены ряда отбрасываем. А для получения приближенного значения суммы с точностью 0,001 надо взять два первых члена. Округлив до тысячных долей, имеем:

$$S \approx 0,33334 - 0,00417 = 0,32917; \quad S \approx 0,329.$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

12.47. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}.$

12.48. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n \sqrt{n}}.$

12.49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3n+2}.$

$$12.50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+5}.$$

$$12.51. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

$$12.52. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n^3 + 1}.$$

$$12.53. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

$$12.54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

$$12.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^n}.$$

$$12.56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n+1)^2}{n!}.$$

$$12.57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{n^3 + 5}.$$

$$12.58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3 + 2}}.$$

$$12.59. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^4 + 1)}{4n^5 - 3n^2 + 1}.$$

$$12.60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + n}.$$

Вычислить сумму ряда с точностью ε .

$$12.61. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 + 1}, \varepsilon = 0,01.$$

$$12.62. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3 + 3}, \varepsilon = 0,01.$$

$$12.63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n^2}, \varepsilon = 0,001.$$

$$12.64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n}, \varepsilon = 0,001.$$

$$12.65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}, \varepsilon = 0,001.$$

$$12.66. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4n}{3n^3 + 5}, \varepsilon = 0,01.$$

12.5. Контрольные задания к главе 12

Исследовать сходимость рядов.

Вариант 1

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1} \sqrt{n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{12n^2 + 3} \right)^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n+5}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Вариант 2

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+4}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) 2^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+5}{5n+6}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

Вариант 3

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{2n+5}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 3}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+2}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$$

Вариант 4

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n+3}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$

Вариант 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{3^n}.$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n)!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+9}{3n+1}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n}{5}.$

Вариант 6

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^7}{n^n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{2n+3}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{2n}.$

Вариант 7

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{\sqrt{3n^2 + 1}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{n^2 + 2}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}.$

Вариант 8

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+7}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3n+5}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{1+n^3}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12n+5}{3n-1} \right)^n.$

Вариант 9

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n+2}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + n + 2} \right)^n.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n n!}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+4}.$

Вариант 10

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{3^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6^n + 3}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{n^2}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2 + 1}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2(n^2+1)}{n!}.$

Глава 13. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

13.1. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости

Ряд вида

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, \quad (13.1)$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots$ – числа, называемые коэффициентами ряда, x – переменная, называется степенным рядом.

Придавая переменной x определенные числовые значения, получаем числовые ряды, которые могут сходиться, а могут расходиться. Совокупность всех числовых значений x , при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Рассматривают также ряды более общего вида (по степеням разности $(x - a)$, где a – некоторое число), а именно

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n. \quad (13.2)$$

Исследование таких рядов путем замены $y = x - a$ сводится к исследованию рядов (13.1). Поэтому в дальнейшем рассматриваем ряды по степеням x (13.1).

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ сходится при значении $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если этот степенной ряд расходится в точке $x = x_1$, то он расходится для всех значений x , для которых $|x| > |x_1|$.

Для каждого степенного ряда (13.1), если он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x = 0$, существует положительное число R такое, что при $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ расходится. (Заметим, что некоторые ряды могут сходиться только в одной точке, тогда $R = 0$, а некоторые – в любой точке числовой оси, тогда $R = \infty$).

Число R называется радиусом сходимости, а интервал $(-R, R)$ – интервалом сходимости степенного ряда (рис. 13.1). На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.



Рис. 13.1

Для ряда (13.2) интервал сходимости ряда принимает вид $|x - a| < R$ или $a - R < x < a + R$, т.е. $(a - R, a + R)$. Радиус сходимости степенного ряда (13.1) можно определить по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (13.3)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (13.4)$$

Для всех значений x , принадлежащих области сходимости степенного ряда, соответствующие числовые ряды сходятся и имеют определенные суммы, т.е. сумма сходящихся на некотором множестве степенного ряда есть функция, определенная на этом множестве. Обозначим ее $f(x)$, $x \in (-R, R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Свойства степенных рядов

1. Сумма степенного ряда $f(x)$ непрерывна внутри его интервала сходимости.

2. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз. Ряды, полученные почленным интегрированием и почленным дифференцированием степенного ряда, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 13.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+3}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad c_n = \frac{2^n}{\sqrt{n+3}}, \quad c_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+4}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3} \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $R = \frac{1}{2}$. Интервал сходимости ряда $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Проверим сходимость

ряда на концах интервала. При $R = -\frac{1}{2}$ ряд принимает вид

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$. Получим знакочередующийся ряд. Напишем его в

развернутом виде: $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$. Так как $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \dots$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$, то по признаку Лейбница ряд сходится (условно). При $R = \frac{1}{2}$

ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$. Исследуем сходимость этого ряда с помощью признака сравнения в предельной форме. Будем сравнивать его с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, который является расходящимся.

$$\text{Итак, } a_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}; \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+3}} = 1 \neq 0.$$

По признаку сравнения рядов в предельной форме ряд расходится. Таким образом, область сходимости исходного ряда принимает вид $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пример 13.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x+3)^n}{5^n n^2}$.

Решение. Обозначим $x+3=y$ и получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{5^n n^2}$. Найдем радиус сходимости ряда.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} 5^{n+1} (n+1)^2}{5^n n^2 (-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)^2}{n^2} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 5.$$

Значит, $R=5$, а интервал сходимости будет $(-5, 5)$. Проверим сходимость ряда на концах интервала. Пусть $y=-5$, тогда ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-5)^n}{5^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ряд сходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходящийся обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha=2>1$.

Пусть $y=5$. Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^n}{5^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Ряд знакочередующийся, сходится абсолютно, так как ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{2n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – обобщенный гармонический сходящийся ряд.

Следовательно, ряд сходится для $-5 \leq y \leq 5$. Заменяя переменную $y = x + 3$, получим $-5 \leq x + 3 \leq 5$ или $-8 \leq x \leq 2$. Область сходимости исходного ряда $[-8, 2]$.

Пример 13.3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Радиус сходимости $R = 0$. Ряд сходится только в одной точке $x = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости степенных рядов.

13.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}.$

13.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+2}.$

13.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$

13.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n7^n}.$

13.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2+1}.$

13.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n+1}.$

13.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{2^n}.$

13.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3n+4}.$

13.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{4^n}.$

13.10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n n!}{(2n)!}.$

13.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(8n^2+1)}.$

13.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-4)^n}{n^n}.$

13.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}.$

13.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{\sqrt{n+2}} x^n.$

13.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{\sqrt[3]{n+1}} x^n.$

13.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n.$

13.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+2)}.$

13.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n!}.$

13.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}} x^n.$

13.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$

13.2. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда на некотором промежутке, то говорят, что она разлагается в степенной ряд на этом промежутке или степенной ряд сходится к функции $f(x)$ на указанном промежутке.

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x = a$ производные любых порядков.

Степенной ряд

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (13.5)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x = a$. Если $a = 0$, то ряд Тейлора принимает вид

$$\begin{aligned} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned} \quad (13.6)$$

и называется *рядом Маклорена*. Пусть $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$, где $S_n(x)$ – частичная сумма, а $r_n(x)$ – остаток ряда Тейлора.

Теорема. Ряд Тейлора сходится к данной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда остаток ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е. для всех значений x из интервала сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (13.7)$$

Теорема. (Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора). Если производные любого порядка $n = 0, 1, 2, \dots$ функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, т.е. $|f^{(n)}(x)| \leq M$, то ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ для любого x из этой окрестности.

Теорема. Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Пример 13.4. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \frac{1}{x}$ по степеням $(x+2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

Р е ш е н и е . Запишем ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$. $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$. По условию $a = -2$.

Вычислим значения функции и ее производных в точке $x = -2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}, & f(-2) &= -\frac{1}{2}; \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f'(-2) &= -\frac{1}{2^2}; \\ f''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{x^3}, & f''(-2) &= -\frac{2!}{2^3}; \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= -\frac{n!}{x^{n+1}}, & f^{(n)}(-2) &= -\frac{n!}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Тогда составляем ряд

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} - \frac{1(x+2)}{1!2^2} - \frac{2!(x+2)^2}{2!2^3} - \frac{3!(x+2)^3}{3!2^4} - \dots - \frac{n!(x+2)^n}{n!2^{n+1}} - \dots = -\frac{1}{2} - \frac{(x+2)}{2^2} - \\ &-\frac{(x+2)^2}{2^3} - \frac{(x+2)^3}{2^4} - \dots - \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Найдем радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^{n+1}}$, положив $y = x + 2$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+2}}{1} \right| = 2.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^{n+1}}$ сходится на интервале $(-2, 2)$, т.е. для всех y , удовлетворяющих неравенству $-2 < y < 2$. На концах интервала при $y = -2$ имеем ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots, \text{ который расходится. При } y = 2 \text{ получаем ряд } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

который также является расходящимся.

Итак, областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^{n+1}}$ будет интервал $(-2, 2)$. Тогда

областью сходимости ряда $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}$ будет интервал $(-4, 0)$, так как

$y = x + 2, -2 < x + 2 < 2$ или $-4 < x < 0$, или интервал $(-4, 0)$.

Разложение функций в ряд Маклорена

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (13.8)$$

$$2. \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (13.9)$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (13.10)$$

$$4. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1; \quad (13.11)$$

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1; \quad (13.12)$$

$$6. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad -1 < x < 1; \quad (13.13)$$

$$7. \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1; \quad (13.14)$$

$$8. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (13.15)$$

Пример 13.5. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \frac{1}{1-x}$.

Решение. Разложим функцию в окрестности точки $a = 0$ в ряд Маклорена, т.е. представим в виде

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Имеем

$$y = \frac{1}{1-x}, \quad y(0) = 1;$$

$$y'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad y'(0) = 1;$$

$$y''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \quad y''(0) = \frac{2!}{1} = 2!;$$

$$y'''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4}, \quad y'''(0) = \frac{3!}{1} = 3!;$$

.....

$$y^{(n)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \dots n}{(1-x)^{n+1}}, \quad y^{(n)}(0) = -\frac{n!}{1} = n!.$$

Составляем ряд

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \dots + \frac{n!}{n!}x^n + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Получили ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$ и первым членом $a_1 = 1$. Этот ряд, как известно, сходится, если $|q| = |x| < 1$. Отсюда имеем: интервал сходимости ряда $(-1, 1)$, а сумма ряда $S = \frac{1}{1-x}$.

Итак, на интервале $-1 < x < 1$ ряд сходится к функции $\frac{1}{1-x}$, т.е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Пример 13.6. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = x^2 \ln(1+x^2)$.

Решение. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = x^2 \ln(1+x^2)$. Так как для $-1 < x \leq 1$ по формуле (13.12) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \dots$, то, заменяя x на x^2 , получим

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} + \dots, \\ x^2 \ln(1+x^2) &= x^4 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^8}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{n} + \dots. \end{aligned}$$

Область сходимости ряда $[-1, 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить в ряд Маклорена.

13.21. $f(x) = \frac{1}{1+x}.$

13.22. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$

13.23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}.$

13.24. $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}.$

$$13.25. f(x) = x \cos \sqrt{x}.$$

$$13.26. f(x) = \frac{\sin 3x}{x}.$$

Разложить в ряд Тейлора.

$$13.27. f(x) = \frac{1}{x} \text{ по степеням } (x+2).$$

$$13.28. f(x) = \cos \frac{x}{2} \text{ по степеням } \left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$13.29. f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ по степеням } (x+1). \quad 13.30. f(x) = \frac{1}{x+3} \text{ по степеням } (x+2).$$

$$13.31. f(x) = e^{\frac{x}{2}} \text{ по степеням } (x-2).$$

13.3. Применение рядов в приближенных вычислениях

Представление элементарных функций в виде степенных рядов позволяет применять эти ряды для приближенных вычислений. С заданной степенью точности можно вычислить значения функций, значения определенных интегралов, которые не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, а также можно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример 13.7. Вычислить $\cos 12^\circ$ с точностью до 0,0001, пользуясь разложением $\cos x$ в ряд Маклорена.

Решение. Переведем 12° в радианы: $\frac{\pi}{180} \cdot 12 = \frac{\pi}{15} \approx \frac{3,1416}{15} \approx 0,2094$.

Используем разложение косинуса в ряд Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad \text{который сходится на } (-\infty, +\infty).$$

Получим

$$\cos 12^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{15}\right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{15}\right)^6 + \dots \quad (*)$$

Определим, сколько первых n членов разложения функции в степенной ряд надо оставить, чтобы сумма отброшенных членов (остаток ряда r_n) не превосходила 0,0001.

Ряд (*) – знакопеременный ряд, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница. Тогда используется оценка $|r_n| < u_{n+1}$, где u_{n+1} – первый из отброшенных членов по абсолютной величине.

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 \approx 0,00219 > 0,0001; \quad \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{15}\right)^4 = \frac{0,00219}{24} = 0,00008 < 0,0001.$$

Поэтому достаточно взять два первых члена ряда

$$\cos 12^0 \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{15} \right)^2 \approx 0,9781.$$

Действительно, если взять в этом равенстве два первых члена, то будем иметь приближенное равенство $\cos \frac{\pi}{15} \approx 1 - \left(\frac{0,2094}{2} \right)^2 = 0,9781$, погрешность которого

равна сумме остатка r_4 знакопередающего ряда, т.е. $\Delta = \frac{\left(\frac{\pi}{15} \right)^6}{6!} - \frac{\left(\frac{\pi}{15} \right)^8}{8!} + \dots$

По признаку Лейбница сумма знакопередающего ряда не превосходит абсолютной величины первого члена.

В нашем случае $|r_n| < \frac{(0,2094)^4}{24} \approx 0,00008 < 0,0001$. Поэтому мы допускаем ошибку меньшую 0,0001.

Итак, $\cos 12^0 \approx 0,9781$ с точностью до 0,0001.

В случае знакопостоянного ряда оценка погрешности сложнее. Во многих случаях можно использовать прием, когда ряд из отброшенных членов сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пример 13.8. Вычислить $\ln 3$, взяв первые три члена разложения функции в ряд. Оценить погрешность.

Решение. Будем использовать разложение в степенной ряд функции $\ln \frac{1+x}{1-x}$, формула (13.13). $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right)$. Этот ряд сходится при $x \in (-1, 1)$. Полагаем $\frac{1+x}{1-x} = 3$, тогда $1+x = 3-3x$; $4x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.

Эта точка принадлежит области сходимости ряда. Тогда

$\ln 3 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \frac{1}{2^7 \cdot 7} + \frac{1}{2^9 \cdot 9} + \dots \right)$. По условию, надо взять три первых члена ряда. Погрешность вычисления – остаток ряда r_n .

$r_n = 2 \left(\frac{1}{2^7 \cdot 7} + \frac{1}{2^9 \cdot 9} + \frac{1}{2^{11} \cdot 11} + \frac{1}{2^{13} \cdot 13} + \dots \right)$. Этот ряд знакопостоянный положительный.

Оценим каждый член ряда следующим образом: множитель, следующий за степенью двойки (9, 11, 13, ...) заменяем на 7: $\frac{1}{2^9 \cdot 9} < \frac{1}{2^9 \cdot 7}$; $\frac{1}{2^{11} \cdot 11} < \frac{1}{2^{11} \cdot 7}$,

$\frac{1}{2^{13} \cdot 13} < \frac{1}{2^{13} \cdot 7}$, Правые части неравенств увеличиваются:

$$r_n = 2 \left(\frac{1}{2^7 \cdot 7} + \frac{1}{2^9 \cdot 9} + \frac{1}{2^{11} \cdot 11} + \frac{1}{2^{13} \cdot 13} + \dots \right) < 2 \left(\frac{1}{2^7 \cdot 7} + \frac{1}{2^9 \cdot 7} + \frac{1}{2^{11} \cdot 7} + \frac{1}{2^{13} \cdot 7} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{2^6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right).$$

Ряд, стоящий в скобках, представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{4}$. Его сумма $S = \frac{a_1}{1-q}$, где

$$a_1 = 1, \text{ т.е. } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Заменяя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию ее суммой, получим $r_n < \frac{1}{2^6 \cdot 7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2^4 \cdot 21} < 0,01$. Таким образом, взяв три члена ряда можно

вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,01$ $\ln 3 \approx 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} \right) \approx 1,095$, т.е.

$$\ln 3 \approx 1,095.$$

Пример 13.9. Вычислить число e с точностью до 0,00001.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad \text{Полагая } x=1, \quad \text{имеем}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots. \quad \text{Этот ряд положительный. Остаток ряда } r_n \text{ имеет}$$

$$\text{вид } r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \quad \text{или}$$

$$r_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right). \quad \text{Заменяя каждый из}$$

сомножителей $n+2, n+3, n+4, n+5, \dots$ меньшей величиной $n+1$, получим

$$\text{неравенство } r_n < \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right). \quad \text{В скобках получаем беско-}$$

нечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{n+1} < 1$ и

первым членом $a_1 = \frac{1}{n+1}$, сумма S которой равна

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} =$$

$= \frac{n+1}{(n+1)(n+1-1)} = \frac{1}{n}$. Получаем $r_n < \frac{1}{n!n}$. Путем подбора определяем, при каком n будет выполняться неравенство $r_n < 0,00001$. Положим, например, $n = 4$.

$$r_4 < \frac{1}{4!4} \approx 0,010417; \quad r_5 < \frac{1}{5!5} \approx 0,001667; \quad r_6 < \frac{1}{6!6} \approx 0,000231;$$

$$r_7 < \frac{1}{7!7} \approx 0,000028; \quad r_8 < \frac{1}{8!8} \approx 0,000003 < 0,00001.$$

Итак, принимаем $n = 8$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2 + 0,5 + 0,166667 + 0,041667 + 0,008333 + \\ + 0,001389 + 0,000198 + 0,000025 = 2,718279, \\ \text{или } e \approx 2,71828 \text{ с точностью до } 0,00001.$$

Пример 13.10. Вычислить $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложение в ряд функции e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Заменим x на $(-x^2)$, получим разложение $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$,

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{x^7}{6 \cdot 7} + \frac{x^9}{24 \cdot 9} - \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{2 \cdot 2^5 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{1}{24 \cdot 9 \cdot 2^9} - \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \frac{1}{110592} - \dots = \\ = \frac{1}{320} \approx 0,0031 > 0,001; \quad \frac{1}{5376} \approx 0,0002 < 0,001.$$

Поэтому, начиная с четвертого члена, отбрасываем все оставшиеся члены ряда, $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0,5 - 0,0417 + 0,0031 = 0,4614$ или 0,461 с точностью до 0,001.

Пример 13.11. Вычислить с точностью до 0,001 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение. Разложим в подынтегральном выражении $\sin x$ в ряд

Маклорена $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx =$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \dots \text{ . Так как } \frac{1}{35280} \approx 0,000028 < 0,001, \text{ то}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0,9461 \text{ с точностью до } 0,0001.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить, взяв три члена соответствующего ряда Маклорена и оценить погрешность ε .

13.32. $\sqrt[3]{e}$.

13.33. $\sin 18^\circ$.

13.34. $\sqrt[5]{1,1}$.

13.35. $\ln 1,04$.

13.4. Контрольные задания к главе 13

1 – 2. Найти области сходимости степенных рядов.

3. Разложить в ряд Маклорена.

4. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Вариант 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(3^n+1)}$.

3. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx, \varepsilon = 10^{-3}$.

Вариант 2

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n \sqrt{n}}$.

3. $y = x^3 \cos 4x$.

4. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx, \varepsilon = 10^{-3}$.

Вариант 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} (x-3)^n$.

3. $y = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

4. $\int_0^{1/8} \sqrt{1-x^3} dx$.

Вариант 4

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n7^n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n+4}.$
3. $y = \frac{\arctg x^2}{x}.$
4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

Вариант 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{3n+5}}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+4)^n.$
3. $y = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}.$
4. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$

Вариант 6

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \sqrt{n^2+1}}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n(8^n+1)}.$
3. $y = \frac{1}{2+x}.$
4. $\sqrt[5]{37}.$

Вариант 7

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+1} x^n.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3} \right)^n (x-1)^n.$
3. $y = \sqrt[5]{8-x^3}.$
4. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{4}}{x} dx.$

Вариант 8

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{4^n \sqrt{n+5}}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2^n+3} (x+5)^n.$
3. $y = \sin 5x + \cos 5x.$
4. $\arctg 0,1.$

Вариант 9

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{9^n} x^n.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+2)^n}{(n+3)^n}.$
3. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$
4. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx.$

Вариант 10

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+2)4^n}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n} (x-3)^n.$
3. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$
4. $\sqrt[10]{1024}.$

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Задания к главе 8

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
1	Если $z = x \ln \frac{y}{x}$, то $z'_y = \dots$	1) xy ; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{x}{y^2}$; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $\ln \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$	4)
2	Если $z = x^2 + 4xy + y + 4x$, то $z'_x = \dots$	1) $2x + 4xy + 1$; 2) $2x + 4y + 4$; 3) $2x + 4y + 1$; 4) $4y + 4$; 5) другой ответ	2)
3	Если $z = x^2y - xy^2 + 3x$, то $z''_{xx} = \dots$	1) $-2x$; 2) $2y - y^2$; 3) $2y$; 4) $-2xy$; 5) $2y + 3$	3)
4	Если $z = y \ln \frac{x}{y}$, то $z''_{xy} = \dots$	1) $\frac{y}{x} + 1$; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $-\frac{y}{x^2}$; 4) $-\frac{x}{y^2}$; 5) $\ln \frac{x}{y} + \frac{1}{y}$	2)
5	Если $u = e^{x+2y+3z}$, то $u''_{xz} = \dots$	1) $3e^{x+2y+3z}$; 2) $e^{x+2y+3z}$; 3) $6e^{x+2y+3z}$; 4) $2e^{x+2y+3z}$; 5) другой ответ	1)
6	Найти z'_x в точке $M(-3; 4)$, если $z = (3x + 2y)^4$		-12
7	Найти z'_y в точке $M\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, если $z = 2x \sin 4y$		16
8	Найти z''_{yy} в точке $M\left(4; \frac{1}{2}\right)$, если $z = \sqrt{x} \cdot y^4$		6
9	Найти $5z''_{yx}$ в точке $M(1; 0)$, если $z = 5xy^3 + 2x^2y$		20
10	Полный дифференциал функции $z = x^2 + 3xy + y^2$ в точке $M(1; 2)$ равен...	1) $7dx + 8dy$; 2) $-8dx + 7dy$; 3) $8dx + 7dy$; 4) $12dx + 9dy$; 5) $12dx + 7dy$	3)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
11	Полный дифференциал функции $z = xy + y^2 - 2x + 5$ в точке $M(2; 1)$ равен...	1) $-dx + 4dy$; 2) $dx + dy$; 3) $-dx - 4dy$; 4) $-dx + 5dy$; 5) $dx + 5dy$	1)
12	Полный дифференциал функции $z = 2x^2 + 2x^3y^3 - y^2$ в точке $M(-2; 1)$ равен...	1) $15dx - 58dy$; 2) $16dx + 50dy$; 3) $16dx - 50dy$; 4) $16dx + 46dy$; 5) $-32dx + 46dy$	3)
13	Полный дифференциал функции $z = 3y^2 - 9xy + x^2 - 2$ в точке $M(1; 3)$ равен...	1) $-46dx + 60dy$; 2) $-25dx + 9dy$; 3) $-7dx + 11dy$; 4) $27dx + 9dy$; 5) $-25dx - 9dy$	2)
14	Полный дифференциал функции $z = y^2 + 4xy - 2x + 7$ в точке $M(-4; 3)$ равен...	1) $16dx - 10dy$; 2) $10dx - 10dy$; 3) $17dx - 3dy$; 4) $10dx - 3dy$; 5) $10dx + 10dy$	2)
15	Если $z = x^3 + y^3 - 2xy + 67$, $x > 0$, $y > 0$, то минимум этой функции $z_{\min} = \dots$		3
16	Если $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$, то максимум этой функции $z_{\max} = \dots$		12
17	Если $z = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y} + 1$, $x > 0$, $y > 0$, то минимум этой функции $z_{\min} = \dots$		13
18	Если $z = 7 - x^2 - xy - y^2 + 4x + 8y$, то максимум этой функции $z_{\max} = \dots$		23
19	Если функция $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 7$, имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то $x_0^2 + y_0^2 = \dots$		17
20	Если функция $z = \frac{9x}{y} - 3x + y + 13$, имеет критическую точку $P_0(x_0; y_0)$, то $x_0 + y_0 = \dots$		4

Задания к главе 9

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
1	Найти интеграл $\int (x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 7)dx$	1) $\frac{1}{5}x^6 - \frac{7}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 - 7x + c$; 2) $\frac{1}{6}x^5 - \frac{7}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 - 7x + c$; 3) $\frac{1}{6}x^5 + \frac{7}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 - 7x + c$	2)
2	Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^2 - 64} dx$	1) $x + 4 \ln \left \frac{x-8}{x+8} \right + c$; 2) $-x + 4 \ln \left \frac{x+8}{x-8} \right + c$; 3) $x - 4 \ln \left \frac{x-8}{x+8} \right + c$	1)
3	Найти интеграл $\int \cos^2 \frac{x}{6} dx$	1) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} + c$; 2) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \sin \frac{x}{3} + c$; 3) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \sin \frac{x}{3} + c$	3)
4	Найти интеграл $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{5}{\sqrt{8-x^2}} \right) dx$	1) $3 \operatorname{arctg} x - 5 \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + c$; 2) $3 \operatorname{arctg} x - 5 \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + c$; 3) $3 \operatorname{arctg} x + 5 \arcsin \frac{x}{3\sqrt{2}} + c$	2)
5	Найти интеграл $\int (1-2x)^9 dx$	1) $-\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + c$; 2) $\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + c$; 3) $\frac{1}{20}(1-2x)^{-10} + c$	1)
6	Найти интеграл $\int x(3x^2 + 1)^5 dx$	1) $\frac{1}{18}(2x^2 + 1)^6 + c$; 2) $\frac{1}{9}(3x^2 + 1)^5 + c$; 3) $\frac{1}{36}(3x^2 + 1)^6 + c$	3)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
7	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$	1) $\arctg(x + 1) + c$; 2) $\arctg(x - 1) + c$; 3) $\frac{1}{2} \arctg(x - 1) + c$	2)
8	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$	1) $\frac{1}{5} \arctg \frac{x + 2}{5} + c$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x + 2}{\sqrt{5}} + c$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x - 2}{5} + c$	1)
9	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	1) $-\arctg(x + 2) + c$; 2) $\arctg(x + 2) + c$; 3) $\arctg(x + 2) + c$	3)
10	Найти интеграл $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$	1) $\frac{1}{2} \ln x^2 - 1 + c$; 2) $\frac{1}{2} \ln x^2 + 1 + c$; 3) $\frac{1}{3} \ln x^2 - 1 + c$	1)
11	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x(x - 15)}$	1) $-\frac{1}{15} \ln \left \frac{x}{x - 15} \right + c$; 2) $-\frac{1}{15} \ln \left \frac{x}{x + 15} \right + c$; 3) $\frac{1}{15} \ln \left \frac{x - 15}{x} \right + c$	1)
12	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + x - 12}$	1) $\frac{1}{7} \ln \left \frac{x + 4}{x - 3} \right + c$; 2) $\frac{1}{7} \ln \left \frac{x - 3}{x + 4} \right + c$; 3) $-\frac{1}{7} \ln \left \frac{x - 4}{x + 3} \right + c$	2)
13	Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x + 1)(x - 9)}$	1) $\frac{1}{10} \ln \left \frac{x - 9}{x + 1} \right + c$; 2) $-\frac{1}{10} \ln \left \frac{x - 9}{x + 1} \right + c$; 3) $\frac{1}{10} \ln \left \frac{x + 9}{x - 1} \right + c$	1)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
14	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 3x - 10}$	1) $\frac{1}{7} \ln \left \frac{x+2}{x+5} \right + c$; 2) $-\frac{1}{7} \ln \left \frac{x-2}{x-5} \right + c$; 3) $-\frac{1}{7} \ln \left \frac{x+2}{x-5} \right + c$	3)
15	Найти интеграл $\int \frac{(1-x^2)^2}{\sqrt{x}} dx$	1) $\sqrt{x} \left(2 + \frac{4x^2}{5} + \frac{2}{5}x^4 \right) + c$; 2) $\sqrt{x} \left(2 - \frac{4x^2}{9} + \frac{2}{5}x^4 \right) + c$; 3) $\sqrt{x} \left(2 - \frac{4x^2}{5} + \frac{2}{9}x^4 \right) + c$	3)
16	Найти интеграл $\int \sin(2-3x) dx$	1) $-\frac{1}{2} \cos(2-3x) + c$; 2) $\frac{1}{3} \cos(2-3x) + c$; 3) $\frac{1}{3} \sin(2-3x) + c$	2)
17	Найти интеграл $\int \sin x \cos 7x dx$	1) $-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{12} \cos 6x + c$; 2) $\frac{1}{8} \cos 16x - \frac{1}{16} \cos 6x + c$; 3) $-\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{12} \sin 6x + c$	1)
18	Найти интеграл $\int \sin 5x \sin 5x dx$	1) $\frac{x}{3} - \frac{1}{10} \sin 10x + c$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{1}{20} \sin 10x + c$; 3) $\frac{x}{10} + \frac{1}{10} \sin 5x + c$	2)
19	Найти интеграл $\int \sin 2x \sin 9x dx$	1) $\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{22} \sin 7x + c$; 2) $\frac{1}{14} \sin 7x - \frac{1}{22} \sin 11x + c$; 3) $\frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{22} \cos 11x + c$	2)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
20	Найти интеграл $\int \cos 4x \cos 2x dx$.	1) $\frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$. 2) $\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{1}{12} \sin 2x + c$. 3) $\frac{1}{4} \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$.	1)
21.	Найти интеграл $\int \left(\sin 7x + \cos \frac{x}{2} \right) dx$	1) $\frac{1}{7} \cos 7x - 3 \sin \frac{x}{2} + c$; 2) $-\frac{1}{7} \cos 7x - 2 \cos \frac{x}{2} + c$; 3) $-\frac{1}{7} \cos 7x + 2 \sin \frac{x}{2} + c$	3)
22	Найти интеграл $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$	1) $2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x}) + c$; 2) $-3\sqrt{x} + 4 \ln(2 + \sqrt{x}) + c$; 3) $4\sqrt{x} + 2 \ln(2 + \sqrt{x}) + c$	1)
23	Найти интеграл $\int \frac{e^x dx}{e^x - 2}$	1) $\ln e^x - 2 + c$; 2) $\ln e^{2x} + 2 + c$; 3) $\frac{1}{2} \ln e^x - 2 + c$	1)
24	Найти интеграл $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{5-x}}$	1) $-3\sqrt{5-x} + 2 \ln(\sqrt{5-x} + 1) + c$; 2) $-2\sqrt{5-x} + 4 \ln(\sqrt{5-x} + 2) + c$; 3) $2\sqrt{5-x} - \ln(\sqrt{5-x} + 2) + c$	2)
25	Найти интеграл $\int \frac{dx}{x \ln^9 x}$	1) $-\frac{1}{7 \ln^7 x} + c$; 2) $\frac{1}{7 \ln^8 x} + c$; 3) $-\frac{1}{8 \ln^8 x} + c$	3)

Задания к главе 10

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
1	Вычислить интеграл $6 \int_2^7 (\sqrt{x+2} + x) dx$		211

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
2	Вычислить интеграл $\int_2^4 (32 + 28x - 9x^2) dx$		64
3	Вычислить интеграл $\int_1^3 x^3 dx$		20
4	Вычислить интеграл $\int_{-1}^3 \left(x + \frac{3}{4}\right) dx$		7
5	Вычислить интеграл $30 \int_0^1 x^2 (1 - x^2) dx$		4
6	Вычислить интеграл $\int_2^4 (x^3 + x) dx$		66
7	Вычислить интеграл $\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{8 - x^2}} dx$		2
8	Вычислить интеграл $\int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$		40
9	Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$		1
10	Вычислить интеграл $3 \int_1^3 (x + 1)^2 dx$		56
11	Вычислить интеграл $5 \int_0^3 x^2 (9 - x^2) dx$		162
12	Вычислить интеграл $8 \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$		21
13	Вычислить интеграл $3 \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$		-4

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
14	Вычислить интеграл $12 \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x dx$		2
15	Вычислить интеграл $15 \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$		2
16	Вычислить интеграл $8(\sqrt{2} - 1) \int_0^{\pi/8} \cos x \cos 3x dx$		1
17	Вычислить интеграл $\frac{30}{\pi} \int_0^{\pi/5} \sin^2 5x dx$		3
18	Вычислить интеграл $4(\sqrt{3} + 1) \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$		4
19	Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x}$		1
20	Вычислить интеграл $3 \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$		20
21	Вычислить интеграл $\frac{84}{\pi} \int_3^{10} \frac{dx}{x^2 - 6x + 58}$		3
22	Вычислить интеграл $\frac{5}{e} \int_0^1 e^x dx$		5
23	Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$		1
24	Вычислить интеграл $24 \int_2^3 \frac{dx}{x^2}$		4
25	Вычислить интеграл $6 \int_1^{e^{\pi/3}} \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$		3

Задания к главе 11

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
1	Определить порядок дифференциального уравнения $x^2 y''' = (y'')^2$		3
2	Определить порядок дифференциального уравнения $y^3 y'' - 3 = 0$		2
3	Определить порядок дифференциального уравнения $y''' \sin^4 x = \sin 2x$		3
4	Определить порядок дифференциального уравнения $4y'' - 8y' + 5y = 5 \cos x$		2
5	Определить порядок дифференциального уравнения $xy' - y = y^2$		1
6	Определить порядок дифференциального уравнения $y^{IV} - y' = 0$		4
7	$y^3 = 3(C - x + \ln x+1)$ – общее решение дифференциального уравнения $(y^2 x + y^2)dy + xdx = 0$. Найти C , если $y(0) = 3$		9
8	$\ln \left \frac{y}{y+2} \right = x^2 + C$ – общее решение дифференциального уравнения $y' - xy^2 = 2xy$. Найти C , если $y(0) = -1$		0
9	$\ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}$ – общее решение дифференциального уравнения $(1+x^3)y^3 dx - (y^2-1)x^3 dy = 0$. Найти C , если $y(1) = 1$		0

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
10	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$. Найти частное решение, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$. В ответ указать значение $2C_1 + C_2$		– 4
11	$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$. Найти частное решение, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$. В ответ указать значение $4C_1 - C_2$		2
12	$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Найти частное решение, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. В ответ указать значение $3C_1 - C_2$		7
13	Уравнением с разделяющимися переменными является...	1) $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$; 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 3) $y' + y - x^2 = 0$; 4) $y' + y - xy^3 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	1)
14	Линейным уравнением первого порядка является...	1) $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$; 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 3) $y'' - 8y' + 12y = -65e^x$; 4) $y' + y - x^2 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	4)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
15	Уравнением Бернулли является...	1) $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$; 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 3) $y' + y - x^2 = 0$; 4) $y' + y - xy^3 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	4)
16	Однородным уравнением первого порядка является...	1) $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$; 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 3) $y' + y - x^2 = 0$; 4) $y' + y - xy^3 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	2)
17	Линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами является...	1) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 2) $y'' - 8y' + y = \cos 4x$; 3) $y' + y - x^2 = 0$; 4) $y' + y - xy^3 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	5)
18	Линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами является...	1) $y' = \frac{6}{x^2 - 9}$; 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 3) $y'' - 8y' + 2y = -5\cos 4x$; 4) $y' + y - x^2 = 0$; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$	3)
19	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = (2x - 1)\operatorname{ctg} y$.	1) $\ln \cos y = x^2 - x + C$; 2) $\ln \cos y = x - x^2 + C$; 3) $\frac{1}{\cos^2 y} = x^2 - x + C$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 y} = x^2 - x + C$; 5) $\frac{1}{\cos^2 y} = 2x + C$	2)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
20	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$.	1) $\cos y = C \cos x$; 2) $\sin y = C \sin x$; 3) $\cos y = \cos x + C$; 4) $\cos^2 y = \cos^2 x + C$; 5) $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + C$	1)
21	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$.	1) $\arcsin y = 0,5e^{x^2} + C$; 2) $\operatorname{arctg} y = e^{x^2} + C$; 3) $\operatorname{arctg} y = 2e^{x^2} + C$; 4) $\ln(y^2 + 1) = 0,5e^{x^2} + C$; 5) $\operatorname{arctg} y = 0,5e^{x^2} + C$	5)
22	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' \sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$.	1) $\operatorname{tg} y = C + \arccos x$; 2) $\operatorname{tg} y = C + \ln(x + \sqrt{1 - x^2})$; 3) $\operatorname{ctg} y = C + \arcsin x$; 4) $\operatorname{tg} y = C + \arcsin x$; 5) $\operatorname{ctg} y = C + \arccos x$	4)
23	Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = \pi/4$	1) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x - 1$; 2) $y = x + \frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + 1$; 5) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x - \sqrt{3}$	4)
24	Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = 3$	1) $y = 2 + \cos x$; 2) $y = 1 + 2 \cos x$; 3) $y = 3 + \sin x$; 4) $y = 2 + \sin x$; 5) $y = 2 \cos x$	1)
25	Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2 y' = 2xy + 3$	1) $y = Cx^2 - 1/x$; 2) $y = C - 1/x$; 3) $y = Cx^2 + 1/x$; 4) $y = C + 1/x$; 5) $y = Cx^2 + 3x^3$	1)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
26	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$	1) $y = 2/x^2 + C$; 2) $y = -2/5x^2 + Cx^3$; 3) $y = -2/5x^2 + C$; 4) $y = 1/x^2 + C/x$; 5) $y = 2/x^2 + C/x^3$	5)
27	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$	1) $y = -1 + C$; 2) $y = 1 + C \cos x$; 3) $y = C/\sin x - 1$; 4) $y = C/\cos x - 1$; 5) $y = C/\cos x + 1$	4)
28	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y \cos x = \cos x$	1) $y = Ce^{\sin x} + 1$; 2) $y = e^{-\sin x} + C$; 3) $y = Ce^{-\sin x} + 1$; 4) $y = Ce^{-\cos x} + 1$; 5) $y = C + 1$	3)
29	Найти общее решение дифференциального уравнения $y = x(y' - x \cos x)$	1) $y = x(-\sin x + C)$; 2) $y = x \sin x + C$; 3) $y = x(\cos x + C)$; 4) $y = x(\sin x + C)$; 5) $y = -x \sin x + C$	4)
30	Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1$	1) $y = (x + 1)e^x$; 2) $y = xe^x + 1$; 3) $y = (x^2 + 1)e^x$; 4) $y = (x + 1)e^{-x}$; 5) $y = xe^{-x} + 1$	1)
31	Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0$	1) $y = -x \ln x $; 2) $y = \ln x /x$; 3) $y = x \ln x $; 4) $y = -\ln x /x$; 5) $y = 1/x^2 - 1/x$	4)
32	Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0.$ В ответ записать $y(2)$		12

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
33	Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $y' - \frac{3}{x}y = x, \quad y(1) = 0$. В ответ записать $y(3)$		18
34	Найти общее решение (общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка $y - xy' = \frac{x}{\cos(y/x)}$	1) $\cos(y/x) = C + \ln x $; 2) $\sin(y/x) = C - \ln x $; 3) $\sin(y/x) = C + 1/x^2$; 4) $\cos(y/x) = C - 1/x^2$; 5) $\sin y = C - \ln x $	2)
35	Найти общее решение (общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка $xy' = y - xe^{y/x}$	1) $e^{-y/x} = \ln(C/x)$; 2) $e^{y/x} = \ln Cx$; 3) $e^{-y} = \ln Cx$; 4) $e^{-y/x} = \ln Cx$; 5) $e^{y/x} = -1/x^2 + C$	4)
36	Найти общее решение (общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$	1) $y = x \ln^2 Cx$; 2) $y = -x \ln^2 Cx$; 3) $y = \ln^2 Cx$; 4) $\sqrt{y/x} = 1/x^2 + C$; 5) $y = -x \ln Cx$	1)
37	Найти общее решение (общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' = y(x + y)$	1) $y = x/\ln Cx$; 2) $y = -\ln Cx$; 3) $y = -x \ln Cx$; 4) $y = -\ln Cx/x$; 5) $y = -x/\ln Cx$	5)
38	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 8y' + 16y = 0$	1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x}$; 2) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$; 3) $y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x)$; 4) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$; 5) $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$	5)
39	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 4y' - 5y = 0$	1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$; 2) $y = e^{-x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$; 3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$; 4) $y = e^{5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; 5) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$	3)

№	Задание	Варианты ответов	Ответ
40	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 25y = 0$	1) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$; 2) $y = C_1 e^{-25x} + C_2$; 3) $y = C_1 e^{25x} + C_2$; 4) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$; 5) $y = e^{5x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$	1)
41	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' = 0$	1) $y = e^{7x}(C_1 + C_2 x)$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{7x}$; 3) $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x$; 4) $y = C_1 e^{\sqrt{7}x} + C_2 e^{-\sqrt{7}x}$; 5) $y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}$	2)
42	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 4y' + 5y = 0$	1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$; 2) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$; 4) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; 5) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$	4)
43	Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 16y' + 64y = 0$	1) $y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{-8x}$; 2) $y = C_1 \cos 8x + C_2 \sin 8x$; 3) $y = e^{8x}(C_1 + C_2 x)$; 4) $y = C_1 + C_2 e^{-8x}$; 5) $y = e^{-8x}(C_1 + C_2 x)$	5)

Задания к главе 12

№	Задание	Ответ
1	Записать общий член ряда $\frac{1}{11} + \frac{2}{102} + \frac{3}{1003} + \frac{4}{10004} + \dots$	
2	Пользуясь определением сходимости ряда, найти его сумму $\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{48} + \frac{4}{256} + \dots$	$\frac{1}{3}$
3	Если ряд $\frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \dots + \frac{5}{3^n} + \dots$ сходится, то его сумма равна	$\frac{5}{2}$

№	Задание	Ответ
4	Найти сумму ряда по определению $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots$	$\frac{23}{90}$
5	Найти сумму ряда по определению $1 + \frac{45}{81} + \frac{243}{729} + \dots + \frac{3^n + 6^n}{9^n} + \dots$	3
6	Записать общий член ряда $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \dots$	
7	Записать общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$	
8	Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$	$\frac{1}{3}$
Исследовать сходимость рядов		
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$	Расход.
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$	Расход.
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$	Сход.
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$	Сход.
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$	Сход.
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$	Сход.
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n+7}$	Расход
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+4}$	Сход.
17	$\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{n}$	Расход.
18	$\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{\sqrt[n]{n}}$	Расход.

№	Задание	Ответ
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5 + 4}$	Сход.
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$	Сход.
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + 2}$	Расход.
22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n + 4)}$	Расход.
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3n}$	Расход.
24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 3)(n + 2)}$	Сход.
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$	Расход.
26	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n + 1} \right)^n$	Сход.
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{n!}$	Сход.
28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 6^n}$	Сход.
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{\pi}{7^n} \right)^n$	Сход.
30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n + 1))^n}$	Сход.

Задания к главе 13

№	Задание
Разложить в ряд Тейлора функцию в окрестности точки x_0	
1	$y = \frac{1}{x + 3}$ в окрестности точки $x_0 = 3$
2	$y = \sqrt[3]{x}$ в окрестности точки $x_0 = -1$
3	$y = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 2$

№	Задание
4	$y = e^x$ в окрестности точки $x_0 = -3$
5	$y = \frac{1}{x+2}$ в окрестности точки $x_0 = -5$
6	$y = e^{1-x}$ в окрестности точки $x_0 = 1$
7	$y = \sin \frac{\pi x}{6}$ в окрестности точки $x_0 = 3$
8	$y = \sqrt[3]{x^2}$ в окрестности точки $x_0 = -1$
9	$y = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = 3$
10	$y = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 3$
Разложить в ряд Маклорена	
11	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2+x^3}}$
12	$y = \frac{1}{x} \ln x \frac{1}{1-x}$
13	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
14	$y = 1 - \cos 3x$
15	$y = \sin 2x$
16	$y = \frac{1}{4+x^2}$
17	$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$
18	$y = \arcsin x^2$
19	$y = x \cos x$
20	$y = \ln(2+x^2)$

ОТВЕТЫ

Глава 8

8.1. а) $z(2;1) = \frac{4}{3}$; $z(1;3) = 3$; б) $z\left(2; \frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}$; $z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}$.

8.2. а) $x^2 + y^2 \leq 9$; б) $y = x$; в) $y > -x$; г) $-1 \leq y \leq x$, x – любое;

д) $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$; е) $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$; ж) $x \geq 4, x \leq -4, -4 \leq y \leq 4$;

з) $\begin{cases} y \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$; и) $y^2 > -x$; к) $xy \neq 1, xy \neq -1$; л) $y \neq x, y \neq -x$;

м) $2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2n+1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$); н) $\sqrt{y} > -x$; о) $x \neq 5, y \neq 0$.

8.3. а) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; б) $xyz > 0$; в) $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$; г) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

8.4. а) $x^2 + y^2 = c$ ($c \geq 0$) – окружности; б) $xy = c$ ($|c| \leq 1$) – гиперболы или пара

прямых $x = 0, y = 0$; в) $x^2 + 4y^2 = c$ ($c \geq 0$) – эллипсы; г) $xy = c$ ($c \neq 0$) – гиперболы

или пара прямых $x = 0, y = 0$ ($c = 0$); д) $y = cx^2$ ($c \neq 0, x \neq 0$) – параболы с выколотой точкой $(0; 0)$ или $x = 0$ ($y \neq 0$) – ось Oy с выколотой точкой $(0; 0)$; е)

$9x^2 - 4y^2 = c$ ($c \neq 0$) – гиперболы или пара прямых $2y = 3x, 2y = -3x$ ($c = 0$).

8.5. а) $z = c - x + y$ – плоскости в пространстве; б) $z = c - x - y$ – плоскости

в пространстве; в) $x^2 + y^2 + z^2 = c$, ($c \geq 0$) – сферы; г) $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ – поверхности уровня.

8.6. а) 6; б) 27; в) -4; г) -1; д) e ; е) 1 ж) предел не существует; з) предел не существует; и) 0; к) 0.

8.7. а) $O(0; 0)$ – точка разрыва; б) $x^2 + y^2 = 9$ – окружность; в) $y = x$ – прямая;

г) $x = 0$ или $y = 0$ – ось Ox и ось Oy ; д) $M(2; -3)$ – точка разрыва; е) $y = -x$ –

прямая; ж) $z = x + y$ – плоскость; з) $x = 0$ или $y = 0$ или $z = 0$ – координатные плоскости.

8.8. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(\sin(2x + 4y) + x \cos(2x + 4y))$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 \cos(2x + 4y)$; в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4y}{(x + 3y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4x}{(x + 3y)^2}$; г) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x; \text{ д) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^4}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y^3}{x}; \text{ е) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y}}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xe^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y}}{y^2};$$

$$\text{ж) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\sqrt{2}xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2\sqrt{2}x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \quad \text{з) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x+a}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+a}{2\sqrt{y^3}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x+a}{\sqrt{y}}; \quad \text{и) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}; \quad \text{к) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5(x+2y^2)}{2\sqrt{(x+y^2)^3}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-5xy}{\sqrt{(x+y^2)^3}}; \text{ л) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \text{ м) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x \sin x^2}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\cos x^2}{y^2}; \quad \text{н) } \frac{\partial u}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy);$$

$$\text{о) } \frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy} \ln z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (xy) \cdot z^{xy-1}.$$

$$\mathbf{8.9.} \text{ а) } dz = (3x^2 - 10xy)dx + (4y^3 - 5x^2)dy; \quad \text{б) } dz = xy(2y^2dx + 3xydy);$$

$$\text{в) } dz = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}(ydx - 3x dy); \quad \text{г) } dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy; \quad \text{д) } dz = y^2 x^{y-1} dx +$$

$$+ x^y(1 + y \ln x)dy; \quad \text{е) } dz = \frac{3(x^2 dx + y^2 dy)}{x^3 + y^3}; \quad \text{ж) } dz = \frac{1}{x+y} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right);$$

$$\text{з) } dz = \frac{2(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}; \quad \text{и) } dz = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right); \quad \text{к) } du = yz dx + xz dy + xy dz;$$

$$\text{л) } du = \frac{x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3 + z^3)^2}}; \quad \text{м) } du = e^{xy}(yz dx + xz dy + dz).$$

8.10. а) 1,01; б) 0,272; в) 5,014; г) 9,26; д) 0,805; е) 4,40;

8.11. $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **8.12.** 1. **8.13.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **8.14.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.15.** $\frac{68}{13}$. **8.16.** $9\bar{i} - 4\bar{j}$.

8.17. $\frac{5}{4}\bar{i} - \frac{3}{4}\bar{j}$. **8.18.** $6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$. **8.19.** $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$.

8.20. а) $\frac{dz}{dt} = 2t^2 + 4t\sqrt{t} + \sqrt{t} + 2t$; б) $\frac{dz}{dt} = 0$; в) $\frac{dz}{dt} = -(e^t + e^{-t})$;

г) $\frac{dz}{dt} = \frac{3t(3t^2 + 4)}{2(t^2 + 1)^4 \sqrt{t^2 + 1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

8.21. а) $\frac{dz}{dx} = \frac{y + xe^x}{1 + x^2 y^2}$; б) $\frac{dz}{dx} = \frac{4x(x - y)}{(x^2 - y)^2}$; в) $\frac{dz}{dx} = e^y(1 + x \cdot \varphi'(x))$; г) $\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 2y}{x^3}$.

8.22. а) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{x(2y - x)}{y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-2x(3y + x)}{y^2}$; б) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-x \cos v + y \sin v}{x^2 + y^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u(y \cos v + x \sin v)}{x^2 + y^2}$; в) $\frac{\partial z}{\partial u} = yx^{y-1} \cdot v + x^y \cdot \ln x \cdot \frac{1}{v}$;

$\frac{\partial z}{\partial v} = yx^{y-1} \cdot u - x^y \cdot \ln x \cdot \frac{u}{v^2}$; г) $\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^2) + (x^2 - 2yx) \cdot 2u$;

$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^2) \cdot 2v + (x^2 - 2yx)$.

8.23. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2x}{4y + 5}$; б) $\frac{dy}{dx} = -3\sqrt{\frac{y}{x}}$; в) $\frac{dy}{dx} = \frac{3ye^{3x} - e^{3y}}{3xe^{3y} - e^{3x}}$; г) $\frac{dy}{dx} = \frac{4ay - 3x^2}{3y^2 - 4ax}$.

8.24. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z - 3x^2}{3z^2 - 2x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2}{3z^2 - 2x}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 3yz}{3z^2 - 3xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y - 3xz - 3}{3z^2 - 3xy}$;

г) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z \sin x}{y \sin z - \cos x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{-y \sin z + \cos x}$.

8.25. а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}$;

$$\text{б)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}; \quad \text{в)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}; \quad \text{г)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y+1)}{(x-1)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x-1)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \text{д)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos(x+y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \sin(x+y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin(x+y); \quad \text{е)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{x+1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \ln(x+1).$$

$$\text{8.26. а)} \quad d^2 z = \frac{12y^3}{x^5} dx^2 - \frac{18y^2}{x^4} dx dy + \frac{6y}{x^3} dy^2; \quad \text{б)} \quad d^2 z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy - \frac{1}{y} dy^2;$$

$$\text{в)} \quad d^2 z = 2e^{x^2+y^2} \cdot \left((2x^2+1)dx^2 + 4xy dx dy + (2y^2+1)dy^2 \right);$$

$$\text{г)} \quad d^2 z = -2 \sin x dx^2 + \frac{2 \sin y}{\cos^3 y} dy^2.$$

$$\text{8.27. а)} \quad z_{\min}(-4;1) = -1; \quad \text{б)} \quad z_{\max}(4;4) = 12; \quad \text{в)} \quad z_{\min}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 3; \quad \text{г)} \quad z_{\min}(-2;0) = -\frac{2}{e};$$

$$\text{д)} \quad z_{\min}(1;3) = 10 - 18 \ln 3; \quad \text{е)} \quad z_{\min}(-1;0) = -1; \quad \text{ж)} \quad z_{\max}(0;0) = 1; \quad \text{з)} \quad \text{экстремума нет.}$$

$$\text{8.28. а)} \quad z_{\min}(1;1) = 2; \quad \text{б)} \quad z_{\max}(-2;-2) = -4; \quad z_{\min}(2;2) = 4; \quad \text{в)} \quad z_{\min}(-1;1) =$$

$$= z_{\min}(1;-1) = -1; \quad z_{\max}(1;1) = z_{\max}(-1;-1) = 1; \quad \text{г)} \quad z_{\min}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = 2 \frac{10}{13}.$$

$$\text{8.29. а)} \quad z_{\text{наиб}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ при } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad z_{\text{наим}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ при } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = -\sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$\text{б)} \quad z_{\text{наиб}} = 13 \text{ при } x = 2, \quad y = -1 \text{ (краевой максимум)}, \quad z_{\text{наим}} = -1 \text{ при } x = y = 1$$

$$\text{(внутренний минимум) и при } x = 0, \quad y = -1 \text{ (краевой минимум); в)}$$

$$z_{\text{наим}}(1;2) = 5, \quad z_{\text{наиб}}(2;3) = 11; \quad \text{г)} \quad z_{\text{наим}}(3;-2) = -11, \quad z_{\text{наиб}}(1;2) = 9; \quad \text{д)}$$

$$z_{\text{наим}}(2;0) = -4, \quad z_{\text{наиб}}(3;3) = 6.$$

8.30. $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $0,5\sqrt[3]{2V}$. **8.31.** $l=b=2\sqrt{A}/\sqrt[4]{3}$, $\alpha=\pi/3$, где l – боковая сторона трапеции, b – основание, α – угол наклона боковой стороны, A – данная площадь сечения. **8.32.** $R=h\sqrt{5}/2$, $H=h/2$, где R – радиус основания палатки, H – высота цилиндрической части, h – высота конической верхушки. **8.33.** $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$, $2\sqrt{S}$. **8.34.** $R=\sqrt{S/(\pi\sqrt{3})}$.

Глава 9

9.1. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 7x + c$. **9.2.** $-x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + c$.

9.3. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{x} + c$. **9.4.** $a^2x + abx^2 + \frac{b^2}{3}x^3 + c$.

9.5. $a^3x - \frac{3}{2}a^2bx^2 + ab^2x^3 - \frac{b^3}{4}x^4 + c$. **9.6.** $\frac{1-x}{x^2} + c$. **9.7.** $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\ln|x| - \frac{2}{x} + c$.

9.8. $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$. **9.9.** $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + c$. **9.10.** $\frac{1}{25}x^5 + \frac{5}{3x^3} + c$.

9.11. $x + 3\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$. **9.12.** $3x^3 + 6x^2 - 6x + 7\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + c$.

9.13. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - \frac{1}{x} + c$. **9.14.** $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$.

9.15. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + c$. **9.16.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + c$. **9.17.** $-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c$.

9.18. $\frac{1}{4}\arctg\frac{x}{2} + c$. **9.19.** $\frac{1}{2}\arctg 2x + c$. **9.20.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\arctg\frac{x}{3} + c$.

9.21. $x + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$. **9.22.** $x - \arctg x + c$. **9.23.** $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$.

9.24. $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctg x + c$. **9.25.** $x + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$. **9.26.** $\arctg x + x - \frac{1}{3}x^3 + c$.

9.27. $\ln|x| + \arctg x + c$. **9.28.** $3x^3 - \frac{12}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$. **9.29.** $\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{3}}{3}x\sqrt{x} -$

$-5x + c$. **9.30.** $6\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^2\sqrt{x} + c$. **9.31.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$. **9.32.** $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + c$.

9.33. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + \ln x + c$. **9.34.** $\frac{3}{4}(x+4)\sqrt[3]{x} + c$.

9.35. $\frac{7}{8}x\sqrt[7]{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + c$. **9.36.** $\frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + c$. **9.37.**
 $2x^2 + 24\sqrt{x} - \frac{9}{x} + c$. **9.38.** $\sqrt{x}\left(2 - \frac{4x^n}{2n+1} + \frac{2x^{2n}}{4n+1}\right) + c$. **9.39.** $\frac{2}{3}\sqrt{3a}x\sqrt{x} + c$.
9.40. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c$. **9.41.** $3\operatorname{arctg} x + 7\arccos x + c$.
9.42. $\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - 3\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + c$. **9.43.** $2\arcsin x + 8\operatorname{arctg} x + c$.
9.44. $3\arcsin x + x + c$. **9.45.** $5\ln|x + \sqrt{1+x^2}| - x + c$. **9.46.** $\ln|x + \sqrt{3+x^2}| +$
 $+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + c$. **9.47.** $5e^x - \frac{1}{x^3} + c$. **9.48.** $e^x + \frac{1}{2x^2} + c$. **9.49.** $e^x + x + c$.
9.50. $\frac{2250^x}{\ln 2250} + c$. **9.51.** $\frac{e^{3x}3^x}{3 + \ln 3} + c$. **9.52.** $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} + c$. **9.53.** $-\frac{25}{7^x \ln 7} -$
 $-\frac{7}{5^x \ln 5} + c$. **9.54.** $\frac{\left(\frac{2}{15}\right)^x}{2\ln\left(\frac{2}{15}\right)} - \frac{3}{5^x \ln 5} + c$. **9.55.** $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3x\sqrt{x}} + c$.
9.56. $\frac{a^x}{\ln a} + 4\sqrt[4]{x} + c$. **9.57.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c$. **9.58.** $\operatorname{tg} x - x + c$.
9.59. $-\operatorname{ctg} x - x + c$. **9.60.** $-3\cos x - 4\sin x + c$. **9.61.** $-3\cos x + \operatorname{tg} x + c$.
9.62. $8\operatorname{tg} x - 7\sin x + c$. **9.63.** $\operatorname{tg} x + 3\sin x - x + c$. **9.64.** $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x - \frac{1}{4}\operatorname{tg} x + c$.
9.65. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$. **9.66.** $\frac{1}{3}x^3 - 2\cos x - 3e^x + c$. **9.67.** $3\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x + c$.
9.68. $-2\operatorname{ctg} x - 3\cos x - 5x + c$. **9.69.** $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}x + c$. **9.70.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$.
9.71. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + c$. **9.72.** $x + \cos x + c$. **9.73.** $\operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x - 9x + c$.
9.74. $3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + c$. **9.75.** $\frac{1}{2c}(\operatorname{atg} x - b\operatorname{ctg} x) + c$. **9.76.** $-\frac{1}{c}(\operatorname{actg} x + b\operatorname{tg} x) + c$.
9.77. $-\frac{1}{14}(5-2x)^7 + c$. **9.78.** $-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4 + c$. **9.79.** $-\frac{1}{5}\ln|3-5x| + c$.
9.80. $-\frac{1}{6}\ln|5-3x^2| + c$. **9.81.** $-\frac{1}{4(x^2-1)^2} + c$. **9.82.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c$.
9.83. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$. **9.84.** $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + c$. **9.85.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4} + c$.

9.86. $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + c$. **9.87.** $\ln |x^2 + 3x + 5| + c$. **9.88.** $\ln |2x^3 - 3x^2 + x - 2| + c$.
9.89. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{\sqrt{5}} + c$. **9.90.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2 + 2) + c$. **9.91.** $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{5}} \right) + c$.
9.92. $-\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + c$. **9.93.** $-\frac{2}{7} \sqrt{2-7x} + c$. **9.94.** $\frac{2}{9} (3x+1) \sqrt{3x+1} + c$.
9.95. $-\frac{3}{8} (1-2x) \sqrt[3]{1-2x} + c$. **9.96.** $\frac{1}{3} (x^2-1) \sqrt{x^2-1} + c$.
9.97. $\frac{1}{4} (x^3-3) \sqrt[3]{x^3-3} + c$. **9.98.** $-\sqrt{1-x^2} + c$. **9.99.** $-\frac{2}{9} \sqrt{2-3x^3} + c$.
9.100. $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{(1-x)^2} + c$. **9.101.** $\ln |x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + c$.
9.102. $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$. **9.103.** $\arcsin \frac{x-2}{2} + c$. **9.104.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + c$.
9.105. $-5\sqrt{3-x^2} + 3\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$. **9.106.** $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3x^4-1}| + c$.
9.107. $\sqrt{x^2+1} + \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + c$. **9.108.** $-\sqrt{2-x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c$.
9.109. $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2-4} - \frac{1}{3} \ln |3x + \sqrt{9x^2-4}| + c$. **9.110.** $\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}| + c$.
9.111. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$. **9.112.** $-\frac{2}{3} (1-x) \sqrt{1-x} + \frac{2}{5} (1-x)^2 \sqrt{1-x} + c$.
9.113. $\frac{2}{5} \sqrt{(x+3)^5} - 2\sqrt{(x+3)^3} + c$. **9.114.** $\frac{2}{15} (3x-7) \sqrt{(x+1)^3} + c$.
9.115. $\frac{2}{9} \sqrt{(x^3+1)^3} + c$. **9.116.** $\frac{1}{5} \sqrt{(x^2-1)^5} + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-1)^3} + c$.
9.117. $2\sqrt{3x+5} + \sqrt{5} \ln \left| \frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}} \right| + c$. **9.118.**
 $\sqrt{2+x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}} \right| + c$. **9.119.** $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$. **9.120.**
 $-2\sqrt{1-x} + 2\ln(\sqrt{1-x}+1) + c$.
9.121. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln |1+\sqrt[3]{x+1}| + c$. **9.122.** $2\operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + c$.
9.123. $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + c$. **9.124.** $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{3}} + c$. **9.125.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \right| + c$.

9.126. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$ **9.127.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + c$ **9.128.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + c$.
9.129. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1 + \sqrt[4]{x}) + c$.
9.130. $-\frac{6}{7}t^7 + \frac{12}{5}t^5 + 3t^4 - 8t^3 - 12t^2 + 48t + 24\ln(t^2+2) -$
 $-\frac{96}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + c, t = \sqrt[6]{x+1}$. **9.131.** $6\ln\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x+1}}\right) + c$. **9.132.** $-\frac{1}{5}e^{-5x} + c$.
9.133. $3\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right) + c$. **9.134.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$. **9.135.** $\frac{1}{3}e^{x^3+1} + c$. **9.136.** $\frac{1}{4}e^{x^4} + c$.
9.137. $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + c$. **9.138.** $\ln(7+e^x) + c$. **9.139.** $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4x + c$.
9.140. $\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{6}}{e^{2x}+\sqrt{6}}\right| + c$. **9.141.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}} + c$. **9.142.** $-\frac{1}{6}\ln|2-3e^{2x}| + c$.
9.143. $e^{\sin x} + c$. **9.144.** $x - \frac{1}{5}\ln(1+e^{5x}) + c$. **9.145.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c$.
9.146. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^x-2}{2}} + c$. **9.147.** $2e^{\sqrt{x}} + c$. **9.148.** $2\arcsin\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4} + c$.
9.149. $c - \frac{1}{2\sqrt{e}}\ln\left|\frac{\sqrt{e}+e^{-x}}{\sqrt{e}-e^{-x}}\right|$. **9.150.** $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + c$.
9.151. $\ln|\ln x| + c$. **9.152.** $\ln|3+\ln x| + c$. **9.153.** $\frac{1}{8}(2\ln x+1)^4 + c$.
9.154. $\frac{1}{3}\ln|\ln(3x-1)| + c$. **9.155.** $-\frac{1}{\ln x} + c$. **9.156.** $\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3} + c$.
9.157. $\ln|\ln|\ln x|| + c$. **9.158.** $\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3} - 4\sqrt{2+\ln x} + c$.
9.159. $-\sqrt{1-2\ln x - \ln^2 x} - \arcsin\frac{\ln x+1}{\sqrt{2}} + c$. **9.160.** $\ln x -$
 $-(\ln 2)(\ln|\ln x + 2\ln 2|) + c$. **9.161.** $2\sin\frac{x}{2} + c$. **9.162.** $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$.
9.163. $c + \frac{1}{b}\cos(a-bx)$. **9.164.** $-\frac{1}{b}\sin(a-bx) + c$. **9.165.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + c$.
9.166. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + c$. **9.167.** $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$. **9.168.** $\frac{1}{3}\sin(x^3+1) + c$.

9.169. $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + c.$ **9.170.** $c - \frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x.$
9.171. $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 12x + c.$ **9.172.** $\frac{1}{3}\left(2\sin \frac{x}{3} + 3\right)^3 + c.$
9.173. $c - \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)^4.$ **9.174.** $\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{32}\sin 8x + c.$
9.175. $\frac{1}{3}\sin^3 x + c.$ **9.176.** $-\frac{1}{4}\cos^4 x + c.$ **9.177.** $-\ln |\cos x| + c.$
9.178. $\ln |\sin x| + c.$ **9.179.** $\frac{1}{2}\ln |\sin 2x| + c.$ **9.180.** $-\frac{1}{5}\ln |\cos 5x| + c.$
9.181. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.$ **9.182.** $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$
9.183. $-2\cos \sqrt{x} + c.$ **9.184.** $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$
9.185. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$
9.186. $\ln |\sin x| - \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + c.$ **9.187.** $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln |\sin x| + c.$
9.188. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + c.$ **9.189.** $-\frac{1}{2\sin^2 x} + c.$ **9.190.** $\frac{1}{3\cos^3 x} + c.$
9.191. $-\sin \frac{1}{x} + c.$ **9.192.** $\ln \sqrt{1 - \cos 2x} + c.$ **9.193.** $\frac{2 - \cos x}{\sin x} + c.$
9.194. $-\frac{1}{4}\ln |1 + 2\cos 2x| + c.$ **9.195.** $-\frac{1}{3}\ln |1 + 3\cos x| + c.$ **9.196.** $\frac{\sin x - 2}{\cos x} + c.$
9.197. $-\frac{1}{3}\ln(1 + 3\cos^2 x) + c.$ **9.198.** $\frac{1}{2}\ln |1 + 2\sin x| + c.$ **9.199.** $2\ln |\sin x| -$
 $-2\operatorname{ctg} x + c.$ **9.200.** $\ln |\sin 2x| + c.$ **9.201.** $-\operatorname{arctg}(\cos x - 2) + c.$
9.202. $\cos x - \operatorname{ctg} x + c.$ **9.203.** $-2\operatorname{ctg} x - 3\cos x + c.$ **9.204.** $5\operatorname{tg} x - 4\sin x + c.$
9.205. $-\frac{a}{2b}\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2b}\cos x + c.$ **9.206.** $-\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{7}} + c.$
9.207. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \left| \cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}} \right| + c.$ **9.208.** $c - \frac{2}{5}\sqrt{3 + 5\cos x}.$
9.209. $-\sqrt{1 + 2\cos x} + c.$ **9.210.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x \right) + c.$
9.211. $c + \frac{3}{14}\sqrt[3]{(4 + 7\sin x)^2}.$ **9.212.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + c.$ **9.213.** $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + c.$

9.214. $2\sqrt{\sin x - \cos x} + c$. **9.215.** $\frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} + c$.
9.216. $-\cos(\ln x) + c$. **9.217.** $c - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\arcsin^2 2x$. **9.218.** $\ln |\arcsin x| + c$.
9.219. $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + c$. **9.220.** $\frac{1}{3}\sqrt{\arcsin^3 x} + c$. **9.221.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$.
9.222. $e^x(x-1) + c$. **9.223.** $-(x+1)e^{-x} + c$. **9.224.** $(x+2)e^x + c$.
9.225. $3e^{\frac{x}{3}}(x^2 - 3x + 4) + c$. **9.226.** $-2e^{-\frac{x}{2}}(5x^2 + 27x + 53) + c$. **9.227.** $e^{2x}(x-4) + c$.
9.228. $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}-1) + c$. **9.229.** $4e^{\sqrt[4]{x+1}}\left(\sqrt[4]{(x+1)^3} - 3\sqrt{x+1} + 6\sqrt[4]{x+1} - 6\right) + c$.
9.230. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$. **9.231.** $-\frac{1}{16}e^{-4x}(4x+1) + c$. **9.232.** $\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c$.
9.233. $\frac{x \cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{7^x}{(\ln 7)^2} + c$. **9.234.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}(\alpha(ax+b)-a) + c$. **9.235.** $\frac{e^{2n\pi x}}{4n^2\pi^3}(2n\pi x - 1) + c$.
9.236. $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$. **9.237.** $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$.
9.238. $\frac{1}{125}e^{5x}(25x^2 - 10x + 2) + c$. **9.239.** $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^2 + 6x + 18) + c$.
9.240. $-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 5) + c$. **9.241.** $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x(x-1) + \frac{1}{3}x^3 + c$.
9.242. $2xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + c$. **9.243.** $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + c$.
9.244. $-\frac{1}{8}e^{-2x}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3) + c$. **9.245.** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + c$.
9.246. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) - e^{1-x}(x^3 + 3x^2 + 6x - 6) + c$.
9.247. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + c$. **9.248.** $2e^{\sqrt{x-1}}(x - 2\sqrt{x-1} + 2) + c$.
9.249. $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + 3e^x(x^2 - 2x + 2) + \frac{1}{4}x^4 + c$.
9.250. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$. **9.251.** $\frac{2}{37}e^{\frac{x}{2}}(\sin 3x - 6\cos 3x) + c$.
9.252. $\frac{e^{2x}}{29}(2\sin 5x - 5\cos 5x) + c$. **9.253.** $-\frac{e^{-2x}}{5}(2\sin x + \cos x) + c$.
9.254. $e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin \frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos \frac{x}{2}\right) + c$. **9.255.** $\frac{e^{-2x}}{8}(\cos 2x - \sin 2x - 2) + c$.

9.256. $-\frac{e^{-2ax}}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{b\sin 2bx - a\cos 2bx}{a^2 + b^2}\right) + c.$ **9.257.** $\frac{e^x}{10}(3\sin 3x + \cos 3x) + c.$
9.258. $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) - e^x(\sin x + \cos x) + \sin x + c.$
9.259. $\frac{2e^{2x}}{17}\left(\sin \frac{x}{2} + 4\cos \frac{x}{2}\right) + c.$ **9.260.** $\frac{1}{2}(e^{2x}\sin(e^{2x}) + \cos(e^{2x})) + c.$
9.261. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\sin(bx) + a\cos(bx)) + c.$ **9.262.** $\frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x\cos x + c.$
9.263. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{25 - x^2} + 25\arcsin \frac{x}{5}\right) + c.$ **9.264.** $\frac{1}{256}\left(\frac{16x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{6x}{x^2 + 4} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) + c.$
9.265. $-\frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$ **9.266.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 9} + 9\ln|x + \sqrt{x^2 + 9}|\right) + c.$
9.267. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 7} + 7\ln|x + \sqrt{x^2 + 7}|\right) + c.$
9.268. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|\right) + c.$ **9.269.** $x\ln x - x + c.$
9.270. $c - x + (x + 2)\ln|x + 2|.$ **9.271.** $x\ln 5x - x + c.$
9.272. $-x - (9 - x)\ln(9 - x) + c.$ **9.273.** $x\ln(x^2 - 1) - 2x - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}\right| + c.$
9.274. $\frac{1}{\ln 2}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(1 - 2x) - x\right) + c.$ **9.275.** $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$
9.276. $\frac{1}{2}x^2\ln 3x - \frac{1}{4}x^2 + c.$ **9.277.** $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c.$
9.278. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + c.$ **9.279.** $(x^2 + x - 2)\ln(x - 1) - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c.$
9.280. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$ **9.281.** $\frac{1}{3}x^3\ln \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^3 + c.$ **9.282.** $\frac{1}{3}(x^3 + 8)\ln(2 + x) -$
 $-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + c.$ **9.283.** $\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c.$
9.284. $\frac{1}{4}(x^4 - 81)\ln(x + 3) - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{4}x + c.$
9.285. $\left(\frac{x^4}{4} - 8x\right)\ln 2x - \frac{x^4}{16} + 8x + c.$ **9.286.** $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c.$
9.287. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 3x - \ln 3x + \frac{1}{2}\right) + c.$ **9.288.** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\left(\ln^2 x - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right) + c.$

9.289. $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right) \ln^2 x - \left(\frac{2}{9}x^3 - x^2 + 2x\right) \ln x + \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c.$
9.290. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right) \ln x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + c.$ **9.291.** $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$
9.292. $-\frac{1}{4x^2}(2 \ln x + 1) + c.$ **9.293.** $-\frac{1}{4x^2}(2 \ln 2x + 1) + c.$ **9.294.** $2\sqrt{x} \ln 3x - 4\sqrt{x} + c.$
9.295. $2\sqrt{x-1} \ln(x-1) - 4\sqrt{x-1} + c.$ **9.296.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + c.$
9.297. $-\frac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x + 3 \ln x + 2\right) + c.$ **9.298.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + c.$
9.299. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + c.$ **9.300.** $(\ln \ln x - 1) \ln x + c.$
9.301. $-\sqrt{2x} \cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x} + c.$ **9.302.** $\sin x - x \cos x + c.$
9.303. $\frac{1}{16} \sin 4x - \frac{x}{4} \cos 4x + c.$ **9.304.** $\frac{1}{25} \sin 5x - \frac{x}{5} \cos 5x - \frac{2}{5} \cos 5x + c.$
9.305. $\frac{3-x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$ **9.306.** $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2-x) \sin \sqrt{x} + c.$
9.307. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$
9.308. $-\frac{x^2}{7} \cos 7x + \frac{2x}{49} \sin 7x + \frac{2}{343} \cos 7x + c.$
9.309. $-x^2 \cos 2x + x \sin 2x + 2 \cos 2x + c.$
9.310. $-\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4}(1-2a) \cos 2x + c.$
9.311. $4 \sin \frac{x}{2}(2x-1) + 2 \cos \frac{x}{2}(5+x-x^2) + c.$
9.312. $\frac{1}{27} \cos 3x(18x-9x^2-25) + \frac{2}{9} \sin 3x(x-1) + c.$
9.313. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c.$
9.314. $\frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2 \cos x^2) + c.$ **9.315.** $-\frac{x}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$
9.316. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctgx}\right) + c.$ **9.317.** $(1-x) \operatorname{ctgx} + \ln |\sin x| + c.$
9.318. $\frac{1}{36}(\ln |\sin 6x| - 6x \operatorname{ctg} 6x) + c.$
9.319. $\frac{x}{2}(\sin(\ln 5x) - \cos(\ln 5x)) + c.$ **9.320.** $\frac{x}{2}\left(\sin\left(\ln \frac{x}{3}\right) - \cos\left(\ln \frac{x}{3}\right)\right) + c.$

9.321. $\frac{x}{2} \left(\sin \left(\ln \frac{x}{9} \right) - \cos \left(\ln \frac{x}{9} \right) \right) + c.$ **9.322.** $2(\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + c.$
9.323. $2\sqrt{x}(x-7)\sin \sqrt{x} + 2(3x-7)\cos \sqrt{x} + c.$ **9.324.** $x \sin x + \cos x + c.$
9.325. $\frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c.$ **9.326.** $\frac{1}{2}(9x-1)\sin 2x + \frac{9}{4} \cos 2x + c.$
9.327. $\frac{x-1}{2n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + c.$ **9.328.** $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$
9.329. $\frac{1}{125}(25x^2 \sin 5x + 10x \cos 5x - 2 \sin 5x) + c.$ **9.330.** $(4x+1)\cos x +$
 $+(2x^2+x-3)\sin x + c.$ **9.331.** $\frac{ax^2+bx+c}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{2ax+b}{\alpha^2} \cos \alpha x - \frac{2a}{\alpha^3} \sin \alpha x + c.$
9.332. $(x^3+3x^2-3x+1)\sin x + 3(x^2+2x-1)\cos x + c.$ **9.333.** $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c.$
9.334. $\frac{1}{32}(8x^2+4x \sin 4x + \cos 4x) + c.$ **9.335.** $\frac{1}{2}(x \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + x) + c.$
9.336. $\frac{1}{4}(2e^{2x} + 4e^x(\sin x + \cos x) + 2x + \sin 2x) + c.$ **9.337.** $\frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + c.$
9.338. $\frac{x}{2} \left(\cos \ln \frac{x}{3} + \sin \ln \frac{x}{3} \right) + c.$ **9.339.** $\frac{x}{10}(\cos(3 \ln x) + 3 \sin(3 \ln x)) + c.$
9.340. $c + x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{1}{2}x^2.$ **9.341.** $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$
9.342. $x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + c.$ **9.343.** $\left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + c.$
9.344. $\left(x - \frac{1}{4}\right) \arcsin \sqrt{2x} + \frac{1}{4} \sqrt{2x-4x^2} + c.$ **9.345.**
 $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + c.$ **9.346.** $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{36}\right) \arcsin 3x + \frac{x}{12} \sqrt{1-9x^2} + c.$
9.347. $\frac{1}{6}(2x^3-6x^2+6x+3) \arcsin x + \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{4} + \frac{11}{9}\right) \sqrt{1-x^2} + c.$
9.348. $c + (\arcsin^2 x - 2)x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x.$ **9.349.** $-2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c.$
9.350. $\frac{2}{3}(\sqrt{3x} - \sqrt{1-3x} \arcsin \sqrt{3x}) + c.$ **9.351.** $-\frac{x}{2 \sin^2 2x} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x + c.$
9.352. $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2} + c.$ **9.353.** $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + c.$
9.354. $-\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} + c.$ **9.355.** $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$
9.356. $x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + c.$ **9.357.** $x \arccos 3x - \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + c.$

$$9.358. \sqrt{x} + x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c.$$

$$9.359. \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \arccos x - \frac{1}{9} (x^2 + 1) \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$9.360. \sqrt{2x} \arccos \sqrt{2x} + \sqrt{1-2x} + c. \quad 9.361. -2\sqrt{1-x} \arccos x - 4\sqrt{1+x} + c.$$

$$9.362. -2\sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c. \quad 9.363. -\sqrt{1-x^2} \arccos x - x + c.$$

$$9.364. x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c. \quad 9.365. x \operatorname{arctg} \frac{x}{5} - \frac{5}{2} \ln(25+x^2) + c.$$

$$9.366. x \operatorname{arctg} 6x - \frac{1}{12} \ln(1+36x^2) + c. \quad 9.367. (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c.$$

$$9.368. (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{2x+1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + c. \quad 9.369. \frac{1}{2} (x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c.$$

$$9.370. \frac{1}{162} (81x^2+1) \operatorname{arctg} 9x - \frac{1}{18} x + c. \quad 9.371. \frac{1}{2} (x^2+a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + c.$$

$$9.372. \frac{1}{3} (x^3+6x) \operatorname{arctg} x - \frac{5}{6} \ln(1+x^2) - \frac{1}{6} x^2 + c. \quad 9.373. (x+4) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + 2\sqrt{x} + c.$$

$$9.374. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2x} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} + c. \quad 9.375. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + c. \quad 9.376. \frac{1}{8} (4x^2-32x+1) \operatorname{arctg} 2x - \ln(1+4x^2) + \frac{x}{4} + c.$$

$$9.377. \ln|x+7| + c. \quad 9.378. -\ln|3-x| + c. \quad 9.379. -\frac{3}{2} \ln|1-2x| + c.$$

$$9.380. \frac{5}{2} \ln|2x+3| + c. \quad 9.381. \frac{1}{11} \operatorname{arctg} \frac{x}{11} + c. \quad 9.382. \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + c.$$

$$9.383. \frac{1}{18} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + c. \quad 9.384. \frac{1}{\sqrt{33}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{11}} + c. \quad 9.385. \frac{1}{2\sqrt{38}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{19}}{\sqrt{2}x + \sqrt{19}} \right| + c.$$

$$9.386. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + c. \quad 9.387. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + c. \quad 9.388. \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x}{x+7} \right| + c.$$

$$9.389. -\frac{1}{x+2} + c. \quad 9.390. -\frac{1}{x-5} + c. \quad 9.391. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+1+\sqrt{2}}{x+1-\sqrt{2}} \right| + c.$$

$$9.392. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + c. \quad 9.393. \frac{1}{2\sqrt{22}} \ln \left| \frac{3x+4-\sqrt{22}}{3x+4+\sqrt{22}} \right| + c. \quad 9.394. \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + c.$$

$$9.395. \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{3}}{x+2+2\sqrt{3}} \right| + c. \quad 9.396. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + c. \quad 9.397. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{6x-3}{6x+1} \right| + c.$$

$$9.398. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + c. \quad 9.399. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{3x+1}{3x+6} \right| + c. \quad 9.400. \frac{1}{17} \ln \left| \frac{2x+7}{2x-10} \right| + c.$$

9.401. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3-x}{3} + c.$ **9.402.** $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{5-8x}{\sqrt{7}} + c.$ **9.403.** $\frac{2}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4x-3}{\sqrt{23}} + c.$
9.404. $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c.$ **9.405.** $\ln \left| \frac{x+2}{(x-1)^3} \right| + c.$
9.406. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}} \right| - \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| + c.$ **9.407.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 4x - 8| -$
 $-\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{3}}{x+2+2\sqrt{3}} \right| + c.$ **9.408.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 6x| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{x+6} \right| + c.$ **9.409.** $\frac{1}{4} \ln |2x^2 -$
 $-8x+1| - \frac{5}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \right| + c.$ **9.410.** $\ln \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} + c.$ **9.411.** $\frac{2}{3} \ln |x| -$
 $-\frac{5}{3} \ln |x-3| + c.$ **9.412.** $\ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + c.$ **9.413.** $\ln |(x-1)\sqrt{2x+3}| + c.$ **9.414.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 -$
 $-2x-8| + \ln \left| \frac{x-4}{x+2} \right| + c.$ **9.415.** $\frac{5}{4} \ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c.$ **9.416.** $\frac{1}{4} \ln |2x^2 +$
 $+2x+3| + \frac{9}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + c.$ **9.417.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c.$
9.418. $\frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 6| - \frac{3}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{23}} + c.$ **9.419.** $-\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 7) + c.$
9.420. $\frac{1}{6} \ln(3x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{3\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{14}} + c.$ **9.421.** $-\frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) -$
 $-\frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + c.$ **9.422.** $8 \ln(x^2 - 0,2x + 0,17) - 20 \operatorname{arctg} \frac{10x-1}{4} + c.$
9.423. $32 \ln \left| \frac{x+3}{x+5} \right| - 3 \ln |x^2 + 8x + 15| + c.$
9.424. $\frac{1}{10} \ln(5x^2 + 2x + 1) + \frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{5x+1}{2} + c.$
9.425. $\frac{5}{4} \ln(2x^2 + 2x + 5) - \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + c.$ **9.426.** $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 10x + 29) -$
 $-\frac{11}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + c.$ **9.427.** $\frac{1}{150} \ln \frac{(x+5)^2}{x^2 - 5x + 25} + \frac{1}{25\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-5}{5\sqrt{3}} + c.$
9.428. $\frac{1}{96} \ln \frac{(4-x)^2}{x^2 + 4x + 16} - \frac{1}{16\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2\sqrt{3}} + c.$ **9.429.** $\frac{1}{4} \ln \frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}} + c.$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{9.430.} -\frac{1}{2(x-2)^2} + c. & \mathbf{9.431.} \frac{1}{3} \ln |x| - \frac{2}{33} \ln |2x-3| - \frac{3}{11} \ln |3x+1| + c. \\
& \mathbf{9.432.} \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{8} \ln(x^2+3) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c. & \mathbf{9.433.} \frac{1}{8} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3x+4}} - \\
& -\frac{5}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c. & \mathbf{9.434.} \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + c. \\
& \mathbf{9.435.} \frac{1}{2(x-1)} + \ln \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + c. & \mathbf{9.436.} -\frac{1}{4(2x+3)^2} + c. \\
& \mathbf{9.437.} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c. & \mathbf{9.438.} -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c. \\
& \mathbf{9.439.} \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c. & \mathbf{9.440.} \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{16(x-2)} + c. \\
& \mathbf{9.441.} \frac{1}{5\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{10\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + c. & \mathbf{9.442.} \frac{1}{58} \ln |x-3| - \frac{1}{26} \ln |x-1| + \\
& + \frac{4}{377} \ln(x^2+4x+8) + \frac{11}{754} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c. & \mathbf{9.443.} \frac{1}{16} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4} \right) + c. \\
& \mathbf{9.444.} \frac{1}{54} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{3x}{x^2+9} \right) + c. & \mathbf{9.445.} \frac{1}{30} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + \frac{1}{70} \ln \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + c. \\
& \mathbf{9.446.} -\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c. \\
& \mathbf{9.447.} -\frac{1}{4} \left(\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) \right) + c. \\
& \mathbf{9.448.} -\frac{9}{2(x^2+2x+10)} - \frac{x+1}{6(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c. \\
& \mathbf{9.449.} -\frac{1}{32} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} - \frac{x+9}{16(x^2+2x+5)} + c. \\
& \mathbf{9.450.} \frac{39x-72}{6(x^2-3x+3)} + \frac{13}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + c. \\
& \mathbf{9.451.} -\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c. \\
& \mathbf{9.452.} -\frac{1}{6x^2} - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3(x-1)} + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + c. & \mathbf{9.453.} \frac{1}{96} \left(\frac{x(x^2+10)}{(x^2+6)^2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{6}} \right) + c.
\end{aligned}$$

$$9.454. \frac{1}{200} \left(\frac{x(3x^2 + 25)}{(x^2 + 5)^2} + \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c.$$

$$9.455. \frac{1}{8} \left(\frac{(x-3)(3x^2 - 18x + 32)}{(x^2 - 6x + 10)^2} + 3 \operatorname{arctg}(x-3) \right) + c.$$

$$9.456. \frac{3}{2} \ln |x+1| - 2 \ln |x+2| + \frac{1}{2} \ln |x+3| + c. \quad 9.457. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-3)^5}{(x-1)(x-4)^4} \right| + c.$$

$$9.458. \frac{1}{5} \left(\ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 9 \operatorname{arctg} x \right) + c. \quad 9.459. \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{|x|} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c.$$

$$9.460. \frac{1}{6} \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{|x|} + \operatorname{arctg} \frac{x}{6} \right) + c. \quad 9.461. \frac{1}{7} \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + 49}}{|x|} + \operatorname{arctg} \frac{x}{7} \right) + c.$$

$$9.462. -\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{|x|} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c. \quad 9.463. \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| - \frac{2}{3x} + c.$$

$$9.464. \frac{1}{2} \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(x-1) + c. \quad 9.465. \frac{1}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{19}} + c.$$

$$9.466. \frac{4}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x-2| - \frac{13}{12} \ln |x+2| + c. \quad 9.467. 5 \ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| - \frac{21}{x+3} + c.$$

$$9.468. \ln \left| \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} \right| + c. \quad 9.469. \frac{x-2}{4(x^2 + 2)} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

$$9.470. \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{x-1}{x^2} + c. \quad 9.471. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{x+2}{2x^2} + c. \quad 9.472. \frac{3}{2} \ln \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} + c.$$

$$9.473. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c. \quad 9.474. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x + c. \quad 9.475. \frac{1}{16} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} + c. \quad 9.476. \frac{1}{2(1-x^2)} + c.$$

$$9.477. \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x+1|} + \frac{x-1}{4(x^2 + 1)} + c. \quad 9.478. \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x-1|} + \frac{1}{4(1-x)} - \frac{x}{4(x^2 + 1)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c. \quad 9.479. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c. \quad 9.480. \ln \left| \frac{x+1}{x^3(x-1)} \right| + c.$$

$$9.481. \frac{2}{x-1} + \ln |x(x-1)| + c. \quad 9.482. \frac{17}{6} \ln |x-3| - \frac{1}{12} \ln |x| - \frac{7}{4} \ln |x-2| + c.$$

$$9.483. \frac{3}{4(x-1)} - \frac{20}{9} \ln |x-1| - \frac{7}{9} \ln |x+2| + c.$$

$$9.484. \frac{7}{2} \ln |7x^2 - 14x - 20| + \frac{5}{\sqrt{27}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x - 7}{\sqrt{27}} + c.$$

$$9.485. \frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 4) + c.$$

$$9.486. -\frac{1}{4} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{3}{2} \ln |x+2| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$9.487. 7 \ln |x+3| - 4 \ln |x-1| - 5 \ln |x-4| + c. \quad 9.488. \ln \left| \frac{(x-2)^7}{(x-1)^3(x-4)^5} \right| + c.$$

$$9.489. 4 \ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{2}{x+2} - \frac{8}{x+4} + c. \quad 9.490. \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + c.$$

$$9.491. 2 \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right| - \frac{13}{2(x-4)^2} + \frac{3}{x-4} + c. \quad 9.492. \frac{6x^2 - 4x + 1}{12(1-x)^4} + c.$$

$$9.493. 4 \ln \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2x + 5} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c. \quad 9.494. \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{2}} + c.$$

$$9.495. \frac{3x-11}{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + \frac{15}{2} \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

$$9.496. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x^2 + 4) - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.$$

$$9.497. \frac{1}{2(x-1)^2} + 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x-2| + c.$$

$$9.498. -\frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + c.$$

$$9.499. \frac{x+2}{4(x^2 + 1)} + \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + c.$$

$$9.500. -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} x + c.$$

$$9.501. \frac{1}{2(x-2)^2} - \ln |x+2| + c. \quad 9.502. \ln |(x-1)(x^2 + 4)| + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.$$

$$9.503. \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x^2 + 1} - \ln |(x-1)\sqrt{x^2 + 1}| \right) + c.$$

$$9.504. \ln |2x-3| - \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} - \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$9.505. -\frac{57}{16} \operatorname{arctg} x - \frac{57x^4 + 103x^2 + 32}{16x(x^2 + 1)^2} + c. \quad 9.506. -\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \ln |2x-3| + c.$$

$$9.507. \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + c. \quad 9.508. \frac{x^2}{2} + 3x + 10 \ln |x-3| + c.$$

9.509. $\frac{x^2}{2} - x + 10 \ln |x+4| + c.$ **9.510.** $\frac{x^2}{2} - 5x + 18 \ln |x+5| + c.$
9.511. $\frac{x^2}{2} - x + 6 \ln |x-5| + c.$ **9.512.** $x + \frac{9}{2} \ln |x-3| - \frac{1}{2} \ln |x-1| + c.$
9.513. $x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$
9.514. $x + \frac{5}{2} \ln(x^2 - 5x + 10) + \frac{5}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2x-5}{\sqrt{15}} + c.$
9.515. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln |x-1| + c.$
9.516. $-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + 3 \ln |x+1| + c.$ **9.517.** $-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c.$
9.518. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$
9.519. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{151}{4} \ln |x-5| - \frac{3}{4} \ln |x-1| + c.$
9.520. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + c.$
9.521. $\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{45}{4} \ln |x+3| + c.$
9.522. $-\frac{x^2}{2} - 4x + \ln \frac{|x|}{(x-1)^8} + c.$ **9.523.** $\frac{x^2}{2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$
9.524. $3x + 2 \ln |x| - \ln \sqrt{x^2 + 1} + c.$ **9.525.** $x - 2 \ln |x| + 3 \ln |x-1| + \frac{2}{x} + c.$
9.526. $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + c.$ **9.527.** $\frac{x^3}{3} - 4x + 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.$
9.528. $\frac{x^3}{3} - x + 8 \operatorname{arctg} x + c.$ **9.529.** $\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x - \ln |x+1| + c.$
9.530. $x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - \frac{27}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c.$
9.531. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{129}{32} \ln |x-2| - \frac{31}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln |x+2| + \frac{33}{16(x+2)} + c.$
9.532. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + c.$
9.533. $-\frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln(x^2 + 4) + \frac{33}{32} \ln |x-2| + \frac{31}{32} \ln |x+2| + \frac{1}{2}x^2 + c.$

$$9.534. \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c. \quad 9.535. \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c.$$

$$9.536. \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c. \quad 9.537. \frac{1}{2\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \operatorname{tg} x \right) + c.$$

$$9.538. \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{5}} \right| + c. \quad 9.539. \frac{1}{\sqrt{33}} \ln \left| \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 - \sqrt{33}}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 + \sqrt{33}} \right| + c.$$

$$9.540. \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left(\frac{6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\sqrt{11}} \right) + c. \quad 9.541. \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + c. \quad 9.542. \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + c.$$

$$9.543. -\frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \right| + c. \quad 9.544. \frac{-2}{9 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} + c. \quad 9.545. \frac{1}{\sqrt{53}} \ln \left| \frac{7 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{53}}{7 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{53}} \right| + c.$$

$$9.546. \frac{1}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{31}} + c. \quad 9.547. \frac{1}{7} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{7} \right| + c.$$

$$9.548. \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln \left| \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + 2\sqrt{14}}{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - 2\sqrt{14}} \right| + c. \quad 9.549. \frac{-2}{(4 - \sqrt{7}) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + c.$$

$$9.550. \frac{1}{\sqrt{51}} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{51}} + c. \quad 9.551. \frac{2}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + c.$$

$$9.552. \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{10}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{10}} \right| + c. \quad 9.553. \frac{1}{2 - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + c.$$

$$9.554. \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 - 2\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 + 2\sqrt{3}} \right| + c. \quad 9.555. \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{2\sqrt{3}} \right) + c.$$

$$9.556. \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + c. \quad 9.557. -\frac{4}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - x + c.$$

$$9.558. \frac{2}{3}tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) - x + c. \quad 9.559. \frac{1}{2\cos 2x} - \frac{1}{2}tg 2x + x + c.$$

$$9.560. \frac{1}{10}ctg \frac{5x}{2} - \frac{1}{30}ctg^3 \frac{5x}{2} + c. \quad 9.561. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tgx + 1 - \sqrt{2}}{tgx + 1 + \sqrt{2}} \right| + c.$$

$$9.562. \frac{1}{4\sqrt{3}} arctg \frac{2tg 2x}{\sqrt{3}} + c. \quad 9.563. \frac{1}{8}x - \frac{3}{32} \sin \frac{4x}{3} + c. \quad 9.564. arctg(tgx - 2) + c.$$

$$9.565. -\frac{1}{17}x + \frac{1}{8} \ln |\sin 2x| - \frac{1}{136} \ln |\sin 2x + 4\cos 2x| + c.$$

$$9.566. -\frac{1}{3}ctg^3 x + c. \quad 9.567. \frac{1}{16}x - \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + c.$$

$$9.568. \frac{2}{5}tg 5x + \frac{1}{15}tg^3 5x - \frac{1}{5tg 5x} + c. \quad 9.569. -\frac{1}{4tg^4 x} - \frac{1}{tg^2 x} + \ln |tgx| + c.$$

$$9.570. \frac{1}{2}(tg^2 x - ctg^2 x) + 2 \ln |tgx| + c.$$

$$9.571. \ln \frac{\sqrt[3]{\left(tg \frac{x}{2} - 1\right)^2}}{\sqrt[3]{tg^2 \frac{x}{2} + tg \frac{x}{2} + 1}} - \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$9.572. \frac{2}{5\sqrt{3}} \sqrt{tg^5 x} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{tgx} + c. \quad 9.573. 16\sqrt[4]{tg \frac{x}{4}} + c. \quad 9.574. \frac{1}{16} \ln \left| \frac{4tgx - 3}{4tgx + 1} \right| + c.$$

$$9.575. -\frac{1}{2(1 + tg 2x)} + c. \quad 9.576. \sin(x + 1) - \frac{1}{3} \sin^3(x + 1) + c.$$

$$9.577. \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 arctg(\sin x) + c. \quad 9.578. \frac{1}{2} \left(\sin(2x - 3) - \frac{1}{3} \sin^3(2x - 3) \right) + c.$$

$$9.579. -\frac{1}{6\sin^2 3x} - \frac{2}{3} \ln |\sin 3x| + \frac{1}{6} \sin^2 3x + c. \quad 9.580. -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{2\sin \frac{x}{2} - 1}{2\sin \frac{x}{2} + 1} \right| + c.$$

$$9.581. -\frac{1}{4\sin 2x} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} \right| + c. \quad 9.582. 2 \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin^4 \frac{x}{2} + c.$$

$$9.583. \frac{1}{2} arctg(\sin x) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c. \quad 9.584. -\frac{1}{\sin x} - 2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + c.$$

$$9.585. \ln |\sin x| - \sin x + c. \quad 9.586. \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

$$9.587. 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + \frac{2}{5} \sin \frac{5x}{2} + c.$$

$$9.588. \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin^3 4x + \frac{3}{20} \sin^5 4x - \frac{1}{28} \sin^7 4x + c.$$

$$9.589. \sin x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin x + \sqrt{2}}{\sin x - \sqrt{2}} \right| + c. \quad 9.590. -\frac{3}{\sin \frac{x}{3}} - 3 \sin \frac{x}{3} + c.$$

$$9.591. \frac{1}{2 \cos 2x} + c. \quad 9.592. \frac{1}{12 \cos^4 3x} + c. \quad 9.593. -\frac{1}{2} \sin^2 x - \ln |\cos x| + c.$$

$$9.594. \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x} \right) + c. \quad 9.595. 2 \left(\frac{1}{8 \cos^8 \frac{x}{2}} - \frac{1}{6 \cos^6 \frac{x}{2}} \right) + c.$$

$$9.596. \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + c. \quad 9.597. -\frac{\cos 2x}{4 \sin^2 2x} - \frac{1}{4} \ln |tgx| + c.$$

$$9.598. \frac{1}{2} \cos^2 x + 3 \cos x + 8 \ln |\cos x - 3| + c. \quad 9.599. \frac{1}{6 \sin^6 x} - \frac{1}{8 \sin^8 x} + c.$$

$$9.600. tgx + \ln |tgx| + c. \quad 9.601. \frac{1}{6} tg^3 2x + c. \quad 9.602. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{tgx - 5}{tgx} \right| + c.$$

$$9.603. x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2tg \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c. \quad 9.604. \ln |tgx| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + c.$$

$$9.605. 2 \left(\ln \left| tg \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right) + c. \quad 9.606. 2 \ln |tgx| + \frac{1}{2} (tg^2 x - ctg^2 x) + c.$$

$$9.607. 3 \ln \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{3}} - ctg \frac{x}{3} \right| + c. \quad 9.608. -\frac{\cos 2x}{8 \sin^4 2x} - \frac{3 \cos 2x}{16 \sin^2 2x} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{1}{\sin 2x} - ctg 2x \right| + c.$$

$$9.609. -\frac{\cos x}{6 \sin^6 x} - \frac{5 \cos x}{24 \sin^4 x} - \frac{5 \cos x}{16 \sin^2 x} + \frac{5}{16} \ln \left| \frac{1}{\sin x} - ctgx \right| + c.$$

$$9.610. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos 2x} + tg 2x \right| + c. \quad 9.611. \frac{2 \sin \frac{x}{4}}{\cos^2 \frac{x}{4}} + 2 \ln \left| \frac{1}{\cos \frac{x}{4}} + tg \frac{x}{4} \right| + c.$$

$$9.612. \frac{1}{2} \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c. \quad 9.613. -\frac{1}{18} \cos 9x + \frac{1}{10} \cos 5x + c.$$

9.614. $-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2} + c.$ **9.615.** $-\frac{1}{22}\cos 11x + \frac{1}{10}\cos 5x + c.$
9.616. $-\frac{1}{20}\cos(10x+5) - \frac{1}{4}\cos(2x+5) + c.$
9.617. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} + c.$
9.618. $\frac{1}{12}\sin 6x - \frac{1}{20}\sin 10x + c.$ **9.619.** $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + c.$
9.620. $\frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{10}\sin\frac{5x}{3} + c.$ **9.621.** $-\frac{1}{12}\sin\left(6x + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}x + c.$
9.622. $\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{16}\sin\left(8x + \frac{5\pi}{12}\right) + c.$ **9.623.** $-\frac{1}{24}\sin\left(12x + \frac{\pi}{10}\right) + c.$
9.624. $\frac{1}{4}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}x + c.$ **9.625.** $\frac{1}{4}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}x}{4} + c.$
9.626. $\frac{1}{26}\sin 13x + \frac{1}{14}\sin 7x + c.$ **9.627.** $\frac{10}{9}\sin\frac{9x}{20} + 10\sin\frac{x}{20} + c.$
9.628. $\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin 4x + c.$ **9.629.** $\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + c.$
9.630. $\frac{1}{4}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{8}\cos 4x + c.$ **9.631.** $\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{10}\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{4x}{3} - \frac{3\pi}{10}\right) + c.$
9.632. $\frac{1}{8}\sin(4x-1) + \frac{1}{16}\sin(8x+3) + c.$ **9.633.** $\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\sin\frac{2x}{5} + c.$
9.634. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + c.$ **9.635.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin\left(6x - \frac{2\pi}{3}\right) + c.$
9.636. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin\left(8x + \frac{\pi}{3}\right) + c.$ **9.637.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$
9.638. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{8}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\sin^3\frac{x}{4} + c.$ **9.639.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c.$
9.640. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + c.$
9.641. $\frac{x}{4} + \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{40}\sin 10x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{128}\sin 16x + c.$
9.642. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + c.$
9.643. $\frac{5}{2}x + \sin 4x + \frac{3}{16}\sin 8x - \frac{1}{12}\sin^3 4x + c.$

9.644. $\frac{35}{128}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^3 2x + \frac{1}{1024}\sin 8x + c.$
9.645. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$ **9.646.** $\frac{2}{3}\sin^3 \frac{x}{2} - \frac{4}{5}\sin^5 \frac{x}{2} + \frac{2}{7}\sin \frac{7x}{2} + c.$
9.647. $\frac{15}{8}\sqrt[5]{\sin^8 \frac{x}{3}} - \frac{15}{9}\sqrt[5]{\sin^{18} \frac{x}{3}} - \frac{15}{28}\sqrt[5]{\sin^{28} \frac{x}{3}} + c.$ **9.648.** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$
9.649. $\sin^5 \frac{x}{5} - \frac{5}{7}\sin^7 \frac{x}{5} + c.$ **9.650.** $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c.$
9.651. $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + \frac{1}{10}\sin^{10} x + c.$ **9.652.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + c.$
9.653. $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c.$ **9.654.** $\frac{1}{20}\cos^5 4x - \frac{1}{12}\cos^3 4x + c.$
9.655. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\cos 2x}} + \frac{3}{10}\cos 2x \sqrt[3]{\cos^2 2x} + c.$ **9.656.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\cos 6x} \left(\frac{1}{7}\cos^2 6x - 1 \right) + c.$
9.657. $\frac{1}{3}\sin^6 \frac{x}{2} + c.$ **9.658.** $\frac{1}{2\pi \cos^2 \pi x} + \frac{1}{\pi} \ln |\cos \pi x| + c.$
9.659. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - x + c.$ **9.660.** $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c.$
9.661. $-\frac{1}{10} \operatorname{ctg}^2 5x - \frac{1}{5} \ln |\sin 5x| + c.$ **9.662.** $x + 2 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{6} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{6} + c.$
9.663. $-\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + c.$
9.664. $\frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + c.$
9.665. $x - \frac{1}{14} \operatorname{ctg}^7 2x + \frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 2x - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 2x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + \frac{3}{2} + c.$
9.666. $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + c.$ **9.667.** $\frac{2}{5} \operatorname{tg}^5 2x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 2x + c.$
9.668. $-3 \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} + c.$ **9.669.** $-\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x - \frac{1}{15} \operatorname{ctg}^3 5x + c.$ **9.670.** $\frac{1}{21} \operatorname{tg}^3 7x + \frac{1}{7} \operatorname{tg} 7x + c.$
9.671. $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \frac{2}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} + c.$ **9.672.** $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 2x - \frac{1}{10} \operatorname{ctg}^5 2x + c.$
9.673. $-\frac{2}{5} \ln |1 - \cos x| + \frac{1}{5} \ln |\cos^2 x + 2 \cos x + 2| - \frac{6}{5} \operatorname{arctg}(1 + \cos x) + c.$
9.674. $7x - 14 \cos x - 3 \sin 2x + \frac{8}{3} \cos^3 x + c.$
9.675. $7x + \frac{14}{3} \sin 3x + \sin 6x - \frac{8}{9} \sin^3 3x + c.$

$$\mathbf{9.676.} \frac{11}{2}x + 6\sin x + \frac{9}{4}\sin 2x + c. \quad \mathbf{9.677.} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - x + c.$$

$$\mathbf{9.678.} \frac{1}{\cos x} + \cos x + \operatorname{tg} x + c. \quad \mathbf{9.679.} \ln |\sin 2x| - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + c.$$

$$\mathbf{9.680.} \frac{1}{8} \sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x} + c. \quad \mathbf{9.681.} \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c.$$

$$\mathbf{9.682.} -\frac{4}{5} \ln \left| 1 - \cos \frac{x}{2} \right| + \frac{4}{5} \ln \left| \cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} + 2 \right| - \frac{12}{5} \operatorname{arctg} \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) + c.$$

$$\mathbf{9.683.} 1) \frac{5}{16}x - \cos x \left(\frac{1}{6}\sin^5 x + \frac{5}{24}\sin^3 x + \frac{5}{16}\sin x \right) + c.$$

$$2) \frac{5}{16}x + \sin x \left(\frac{1}{6}\cos^5 x + \frac{5}{24}\cos^3 x + \frac{5}{16}\cos x \right) + c.$$

$$\mathbf{9.684.} \ln \left| x + \frac{13}{2} + \sqrt{x^2 + 13x + 41} \right| + c. \quad \mathbf{9.685.} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right| + c.$$

$$\mathbf{9.686.} \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 8} \right| + c. \quad \mathbf{9.687.} \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x + 1) + c.$$

$$\mathbf{9.688.} \arcsin \frac{x-1}{3} + c. \quad \mathbf{9.689.} \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 12x + 11} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + \frac{11}{2}} \right| + c.$$

$$\mathbf{9.690.} -3\sqrt{1-x^2} + 13\arcsin x + c. \quad \mathbf{9.691.} -3\sqrt{-x^2 + 10x - 24} + 13\arcsin(x-5) + c.$$

$$\mathbf{9.692.} -\ln |t-1| + \frac{1}{2} \ln |t^2 + t + 1| + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c, \quad t = \sqrt[3]{\frac{x+4}{x+2}}.$$

$$\mathbf{9.693.} 6 \ln \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + c. \quad \mathbf{9.694.} \frac{1}{6} \sqrt{(2x+1)^3} - \frac{3}{2}x + c.$$

$$\mathbf{9.695.} \frac{1}{2}(2x-5) - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(2x-5)^2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{2x-5} - \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt[3]{2x-5} + 1 \right| + c.$$

$$\mathbf{9.696.} \ln |3+x| - 3 \ln \left| 1 + \sqrt[3]{3+x} \right| - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{3+x} + c.$$

$$\mathbf{9.697.} \frac{3}{8}t^{16} - \frac{6}{5}t^{10} + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{7}t^7 + c, \quad t = \sqrt[6]{x-1}.$$

$$\mathbf{9.698.} \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + c, \quad t = \sqrt[4]{x-7}.$$

$$\mathbf{9.699.} 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x}) + c.$$

$$\mathbf{9.700.} \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x)^5} - \sqrt{2x} + 3\sqrt[6]{2x} - 3\operatorname{arctg} \sqrt[6]{2x} + c. \quad \mathbf{9.701.} -\frac{4}{3\sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3}} + c.$$

$$\mathbf{9.702.} \frac{3}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^4} - \frac{3}{28} \sqrt[3]{\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^7} + c. \quad \mathbf{9.703.} -\frac{3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} + c.$$

$$\mathbf{9.704.} \ln \left| \frac{(\sqrt{x-3}-1)^2}{x-2+\sqrt{x-3}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{3}} + c. \quad \mathbf{9.705.} \frac{3}{2} \sqrt[3]{2x-5} + 3\sqrt[6]{2x-5} +$$

$$+ 3\ln|\sqrt[6]{2x-5}-1| + c. \quad \mathbf{9.706.} -\sqrt{7+2x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{7+2x} - 3\sqrt[6]{7+2x} - 3\ln|\sqrt[6]{7+2x}-1| + c.$$

$$\mathbf{9.707.} -\sqrt{9-2x} - 2\sqrt[4]{9-2x} - 2\ln|\sqrt[4]{9-2x}-1| + c. \quad \mathbf{9.708.} \frac{2}{5}(x+1)\sqrt[3]{(6x+1)^2} + c.$$

$$\mathbf{9.709.} \frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1} + c. \quad \mathbf{9.710.} \frac{1}{5}(x-3)\sqrt[3]{(3x-14)^2} + c.$$

$$\mathbf{9.711.} 2\sqrt{x+6} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+6}{2}} + c.$$

$$\mathbf{9.712.} \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x^4+1} + \ln(\sqrt[3]{x^4+1}+1) \right) + c.$$

$$\mathbf{9.713.} \frac{1}{3}(x^2-2x-3)\sqrt{x^2-2x+3} + c. \quad \mathbf{9.714.} \frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x} + c.$$

$$\mathbf{9.715.} \frac{1}{2} \left(x\sqrt{5-x^2} + 5\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c. \quad \mathbf{9.716.} \frac{1}{2} x\sqrt{2-x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

$$\mathbf{9.717.} \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{6x-x^2-7} + \arcsin \frac{x-3}{\sqrt{2}} + c. \quad \mathbf{9.718.} \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{5-2x-x^2} +$$

$$+ 3\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{6}} + c. \quad \mathbf{9.719.} \frac{1}{2} \left((x+2)\sqrt{3-4x-x^2} + 7\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{7}} \right) + c.$$

$$\mathbf{9.720.} 2\arcsin \frac{x-1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)(1+2x-x^2)\sqrt{3+2x-x^2} + c. \quad \mathbf{9.721.} 2\arcsin \frac{x+2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4}(x+2)(x^2+4x+2)\sqrt{-4x-x^2} + c. \quad \mathbf{9.722.}$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{(x^2-2x-1)^5} + \frac{1}{7}\sqrt{(x^2-2x-1)^7} + c.$$

$$\mathbf{9.723.} \frac{2}{5}\sqrt{(x^2+4x+2)^5} + \frac{1}{7}\sqrt{(x^2+4x+2)^7} + c. \quad \mathbf{9.724.} \frac{x+3}{4\sqrt{x^2+6x+13}} + c.$$

$$\mathbf{9.725.} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{2}(2x-x^2)} + c. \quad \mathbf{9.726.} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(x+3)}{\sqrt{2}(-x^2-6x-8)} + c.$$

$$9.727. \frac{x^3}{9\sqrt{(3+x^2)^3}} + c. \quad 9.728. \frac{x^3}{108\sqrt{(6+x^2)^5}} + c. \quad 9.729. \frac{(x-1)^3}{3\sqrt{(x^2-2x+2)^5}} + c.$$

$$9.730. \frac{x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c. \quad 9.731. \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} \arcsin -\frac{x+2}{\sqrt{2}} + c.$$

$$9.732. -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + c. \quad 9.733. \frac{\sqrt{(x^2-2x-1)^3}}{6(x-1)^3} + c. \quad 9.734. \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x}| -$$

$$-\frac{4}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} + c. \quad 9.735. \frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{15}x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{15}x-2\sqrt{4x^2+1}} \right| + c.$$

$$9.736. -\frac{\sqrt{(8-2x-x^2)^5}}{45(x+1)^5} + c$$

$$9.737. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{4-4x+2x^2}+x-1}{\sqrt{4-4x+2x^2}-x+1} \right| + \ln|1-x+\sqrt{2-2x+x^2}| + c.$$

$$9.738. \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + c. \quad 9.739. \mp \arcsin \frac{1}{x-1} + c \text{ ("-" при } x > 1 \text{ и "+"}$$

$$\text{при } x < 1). \quad 9.740. -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3-x}{x}} + c. \quad 9.741. -2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c. \quad 9.742. -\frac{2}{11}\sqrt{\frac{11-x}{x}} + c.$$

$$9.743. \ln \left| \frac{x+1}{x+2+\sqrt{2x^2+6x+5}} \right| + c. \quad 9.744. \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \right| + c.$$

$$9.745. -\frac{1}{2} \left| \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2x} \right| + c. \quad 9.746. \sqrt{\frac{x-2}{x}} + c. \quad 9.747. -\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}(x-1)} + c.$$

$$9.748. \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} + c. \quad 9.749. -\ln \left| \frac{\sqrt{5x^2-28x+40}-x-2}{x+3} \right| + c.$$

$$9.750. \frac{1}{2} \ln \left| x - \frac{11}{2} + \sqrt{x^2-11x+32} \right| + 3\sqrt{x^2-11x+32} + c.$$

$$9.751. \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}| + \sqrt{2} \ln \left| \frac{2-x+\sqrt{2x^2-4x+4}}{2x} \right| + c.$$

$$9.752. -5\sqrt{-x^2+8x-7} + 13\arcsin \frac{x-4}{3} + c.$$

$$9.753. 3\ln \left| x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2+5x+7} \right| + \ln \left| \frac{2+\sqrt{x^2+5x+7}}{2(x+2)} \right| + c.$$

$$9.754. \quad \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x^2 + 8x + 10} - x - 1}{2(x+3)} \right| + \ln |x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}| + c.$$

$$9.755. \quad \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 2t + 1} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c, \quad t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$$

$$9.756. \quad \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^3} - 1}{\sqrt[4]{1+x^3} + 1} \right| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^3} + c. \quad 9.757. \quad \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \ln \left| \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x-1} + 1)^3} \right| + c.$$

$$9.758. \quad \frac{1}{3} \ln \frac{(\sqrt{1+(x-2)^3} - 1)^2}{|(x-2)^3|} + c. \quad 9.759. \quad \frac{3}{\sqrt[3]{x+2}} + \ln \left| \frac{x+1}{(\sqrt[3]{x+1} + 1)^3} \right| + c.$$

$$9.760. \quad \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^3 - 3x^2 + 3x} - 1}{\sqrt[4]{x^3 - 3x^2 + 3x} + 1} \right| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^3 - 3x^2 + 3x} + c. \quad 9.761. \quad -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + c.$$

$$9.762. \quad -\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} + c. \quad 9.763. \quad \frac{4+3x^2}{9\sqrt{2+3x^2}} + c. \quad 9.764. \quad \frac{10-7x^2}{49\sqrt{5-7x^2}} + c.$$

$$9.765. \quad \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2 + 12x - 6)^2}}{4(2-x)^2} + c.$$

$$9.766. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3 \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} \right) + c.$$

$$9.767. \quad -6t - 2 \ln \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c, \quad t = \sqrt[3]{1+\sqrt{2-x}}.$$

$$9.768. \quad 4\sqrt{\sqrt{x+2}+1} \left(\frac{1}{5} (\sqrt{x+2}+1)^2 - \frac{2}{3} (\sqrt{x+2}+1) + 1 \right) + c.$$

$$9.769. \quad -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x-1}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x-1}+1)^9} + c. \quad 9.770. \quad \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} \right) + c.$$

$$9.771. \quad -\frac{\sqrt[3]{(1-4x^3)^5}}{5x^5} + c.$$

$$9.772. \quad \frac{2}{3} t^9 + \frac{24}{11} t^{11} + \frac{36}{13} t^{13} + \frac{8}{5} t^{15} + \frac{6}{17} t^{17} + c, \quad t = \sqrt[6]{x+1}.$$

$$9.773. \quad \frac{1}{10} \sqrt{\left(5x^{\frac{4}{3}} + 3 \right)^3} + c. \quad 9.774. \quad \frac{1}{14} \left(1 + 3 \sqrt[3]{x^2} \right)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{8} \left(1 + 3 \sqrt[3]{x^2} \right)^{\frac{4}{3}} + c.$$

$$9.775. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + c.$$

Глава 10

- 10.1.** $\frac{1}{2}$. **10.2.** $\frac{1}{3}$. **10.3.** $e-1$. **10.4.** $0 \leq I \leq \frac{4}{27}$. **10.5.** $3 \leq I \leq 5$. **10.6.** $0 < I < 1$.
10.7. $12 \leq I \leq 16$. **10.8.** $|I| < 4^{-4}$. **10.9.** $\frac{\pi}{2\sqrt{7}} \leq I \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **10.10.** $\frac{1}{3}$. **10.11.** $\frac{1}{4}$.
10.12. $\frac{5}{\pi}(\pi-2)$. **10.13.** $17,5-6\ln 6$. **10.14.** $18\frac{2}{3}$. **10.15.** $4,5$. **10.16.** $\frac{1}{63}(4^7-1)$.
10.17. 60 . **10.18.** 36 . **10.19.** $32,5$. **10.20.** $\frac{16}{3}$. **10.21.** $\frac{19}{3}$. **10.22.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
10.23. 2 . **10.24.** $2,5-4\ln 2$. **10.25.** $2-\ln 5$. **10.26.** $5,5+7\ln 2$. **10.27.** $\frac{1}{8}$.
10.28. $\ln \frac{4}{3}$. **10.29.** $\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$. **10.30.** $\frac{\pi}{12\sqrt{6}}$. **10.31.** $\frac{\pi}{24\sqrt{3}}$. **10.32.** $\frac{\pi}{12}$.
10.33. $\frac{1}{4}\ln \frac{5}{2}$. **10.34.** $\frac{\pi}{20}$. **10.35.** $\frac{1}{4}\ln \frac{1}{15}$. **10.36.** $\arctg \frac{1}{7}$. **10.37.** $\ln 3$.
10.38. $\frac{\pi}{8}$. **10.39.** $\frac{1}{3}\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **10.40.** $\frac{\pi}{16}$. **10.41.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **10.42.** $\frac{\pi}{6}$.
10.43. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **10.44.** $\ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. **10.45.** $\frac{\pi}{6}$. **10.46.** 1 . **10.47.** 1 . **10.48.** $\frac{1}{6}(e^3-1)$.
10.49. $\frac{7}{\ln 2}$. **10.50.** $\frac{4}{3\ln 3}$. **10.51.** $\frac{1}{2\ln 5}\left(5^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$. **10.52.** $\frac{9}{\ln 9}(9^3-1)$. **10.53.** $2(e-1)$.
10.54. $e-\sqrt{e}$. **10.55.** e^e-e . **10.56.** $\arctg e-\frac{\pi}{4}$. **10.57.** $\frac{1}{15}(e^6-1)$.
10.58. $\ln \frac{4}{3}$. **10.59.** $\frac{\pi}{4}$. **10.60.** $\frac{1}{3}$. **10.61.** $\frac{3}{4}(2^{\sqrt[3]{2}}-1)$. **10.62.** 0 . **10.63.** $\frac{1}{2}$.
10.64. $\frac{\pi-2}{8}$. **10.65.** $\frac{\pi}{2}$. **10.66.** 1 . **10.67.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **10.68.** $-\frac{1}{3}$. **10.69.** $\frac{\pi}{20}$.
10.70. $\frac{2}{3}$. **10.71.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$. **10.72.** $\frac{2}{3}$. **10.73.** $\frac{3\pi}{8}$. **10.74.** $\frac{3\pi}{16}$. **10.75.** 0 . **10.76.** π .
10.77. $\frac{1}{3}$. **10.78.** $\frac{1}{3}$. **10.79.** 0 . **10.80.** 0 . **10.81.** $\frac{3}{8}(5^{\sqrt[3]{5}}-1)$. **10.82.** $\frac{3\sqrt{3}}{14}$.
10.83. $\ln \sqrt{3}$. **10.84.** $\frac{8}{21}$. **10.85.** $\sin 2$. **10.86.** $4\sqrt{2}$. **10.87.** $\frac{\pi^2}{32}$. **10.88.** $\ln 2$.
10.89. $\frac{4\pi}{3}$. **10.90.** $\frac{14}{15}$. **10.91.** $\frac{506}{15}$. **10.92.** $2-\arctg 2$. **10.93.** $\frac{2}{3}(1+\ln 2)$.

10.94. $4 - 2 \ln 2$. **10.95.** $-21 \frac{333}{1372}$. **10.96.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **10.97.** $0,553$. **10.98.** $2\sqrt{6}\pi$.
10.99. $\frac{3\pi}{4}$. **10.100.** $\frac{7\pi}{4}$. **10.101.** $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$. **10.102.** $0,733$. **10.103.** $\frac{\pi}{4}$.
10.104. 8π . **10.105.** $0,4772$. **10.106.** 36π . **10.107.** $\frac{116\sqrt{2}}{15}$.
10.108. $\frac{\ln 112}{25}$. **10.109.** Положить $x = 2 \sin^2 t$; $\frac{\pi - 2}{2}$. **10.110.** $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$.
10.111. Положить $x = 4 \sin^2 t$; $\pi - 2$. **10.112.** $\frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$. **10.113.** $\frac{2\pi}{3}$. **10.114.** $x = 2$.
10.115. Положить $x = a \sin^2 t$; $\frac{a(\pi - 2)}{4}$. **10.116.** $\frac{\sqrt{5}}{2} \ln 2 \frac{3}{2}$. **10.117.** $\arcsin \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$.
10.118. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$. **10.119.** $\frac{17}{6}$. **10.120.** $6\sqrt{2}$. **10.121.** $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$. **10.122.** $1 - \frac{\pi}{4}$.
10.123. $3\sqrt{3} - \pi$. **10.124.** 4π . **10.125.** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.126.** $\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)$.
10.127. $\frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{3}}$. **10.128.** $\frac{\sqrt{3}}{72}$. **10.129.** $\sqrt{2} - 1$. **10.130.** $\frac{1}{2} \left(\arctg e - \frac{\pi}{4} \right)$.
10.131. $4 - \pi$. **10.132.** $4 \arctg e + \ln \frac{e^2 + 1}{2}$. **10.133.** $2 - \frac{\pi}{2}$. **10.134.** $\frac{\pi}{4}$.
10.135. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. **10.136.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$. **10.137.** $\frac{1}{2}$.
10.138. $\frac{2}{\sqrt{5}} \arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.139.** $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$. **10.140.** $0,074$. **10.141.** $\frac{2}{3} \ln 4$.
10.142. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **10.143.** $\frac{1}{9}$. **10.144.** $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. **10.145.** $\frac{3}{16} (7\sqrt[3]{4} - 12)$.
10.146. $\ln \left| \frac{\sqrt{3} + 4}{10 - 5\sqrt{3}} \right|$. **10.147.** $\ln \frac{4}{3}$. **10.148.** 0 . **10.149.** 0 . **10.150.** 0 .
10.151. $\frac{e - 2}{4e}$. **10.152.** $2(2^e + 3)$. **10.153.** $-2,437$. **10.154.** $\frac{2}{5} (e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$.
10.155. $\frac{e^\pi + 1}{4}$. **10.156.** $\frac{3(e^\pi - 1)}{10}$. **10.157.** $\frac{1}{6} (e^{\pi/2} - 1)$. **10.158.** $\frac{6 - 4e^\pi}{13}$.
10.159. $-8,258$. **10.160.** $8,389$. **10.161.** $2 \ln 2 - 1$. **10.162.** $2e - 1$.

- 10.163.** $\frac{128}{3} \ln 16 - 28$. **10.164.** 1,2585. **10.165.** $64 \ln \frac{2}{3} - \frac{56}{9}$. **10.166.** 1,123.
10.167. $e^{\pi/2} - 1$. **10.168.** $\frac{18}{25\pi^2}$. **10.169.** $\frac{9}{4}$. **10.170.** $\frac{18}{\pi^2}$. **10.171.** $\frac{\pi}{2} - 1$
10.172. 16π . **10.173.** 4π . **10.174.** 0,089. **10.175.** $\frac{\pi^3}{384} - \frac{\pi}{64}$. **10.176.** $16\pi^3 - 96\pi$.
10.177. $\frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.178.** $6 \sin \frac{\pi}{9}$. **10.179.** $\frac{4\pi}{3} - 2 \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.
10.180. $\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3$. **10.181.** $\frac{1}{2}$. **10.182.** $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$. **10.183.** $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.
10.184. 1,349. **10.185.** 0,916. **10.186.** 0,693. **10.187.** 2,320. **10.188.** 0,882.
10.189. 0,69377. **10.190.** 0,56078. **10.191.** 0,46442. **10.192.** 0,40551.
10.193. 0,36231. **10.194.** 0,32906. **10.195.** 0,30257. **10.196.** 0,28089.
10.197. 0,26280. **10.198.** 0,24744. **10.199.** 0,78458. **10.200.** 0,23176.
10.201. 0,10723. **10.202.** 0,06124. **10.203.** 0,03948. **10.204.** 0,02752.
10.205. 0,02027. **10.206.** 0,01554. **10.207.** 0,01229. **10.208.** 0,00996.
10.209. 0,84259. **10.210.** 0,45261. **10.211.** 0,31055. **10.212.** 0,23661.
10.213. 0,19119. **10.214.** 0,16043. **10.215.** 0,13821. **10.216.** 0,12140.
10.217. 0,10824. **10.218.** 0,09766. **10.219.** 0,949. **10.220.** 0,6938.
10.221. $n \geq 37$. **10.222.** $n \geq 12$. **10.223.** $n \geq 48$. **10.224.** $n \geq 24$. **10.225.** $n \geq 18$.
10.226. $n \geq 25$. **10.227.** $n \geq 13$. **10.228.** $n \geq 13$. **10.229.** $31; \Delta(6) = 1$.
10.230. $5,265; \Delta(8) = 0,068$. **10.231.** $91; \Delta(6) = 1$. **10.232.** $25,5; \Delta(8) = \frac{1}{6}$.
10.233. $3,1399; \Delta(10) = \frac{1}{600}$. **10.234.** $0,916; \Delta(8) = 0,0088$. **10.235.** $Q \approx 83,25 \text{ м}^3 / \text{с}$.
10.236. $\approx 239 \text{ м}^2$. **10.237.** $\frac{1}{2}$. **10.238.** Расход. **10.239.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **10.240.** $\frac{\pi}{4}$. **10.241.** π .
10.242. π . **10.243.** Расход. **10.244.** Расход. **10.245.** $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$. **10.246.** $\frac{2}{3} \ln 2$.
10.247. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **10.248.** $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{a^{\alpha-1}}$ если $\alpha > 1$; расход., если $\alpha \leq 1$. **10.249.** $\frac{1}{n-1}$,
если $n > 1$; расход., если $n \leq 1$. **10.250.** $\frac{\pi}{4}$. **10.251.** Расход. **10.252.** $1 + \ln 2$.
10.253. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **10.254.** $\frac{\pi}{3}$. **10.255.** $4 \cdot 10^{-4}$. **10.256.** Расход. **10.257.** Расход.

10.258. $\frac{\pi}{6}$. 10.259. $\frac{\pi-2}{8}$. 10.260. 2. 10.261. $\ln 2$. 10.262. 1. 10.263. $\frac{1}{3e^3}$.
 10.264. 1. 10.265. $\frac{1}{\ln^2 2}$. 10.266. Расход. 10.267. 1. 10.268. Расход. 10.269. $\frac{1}{2}$.
 10.270. 16. 10.271. 0,012. 10.272. $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$. 10.273. $\frac{\pi^2}{8}$. 10.274. 0,31. 10.275. $\frac{2}{5}$.
 10.276. Расход. 10.277. Расход. 10.278. Расход. 10.279. 0,14. 10.280. $\frac{\pi}{2} - 1$.
 10.281. $\frac{1}{p}$, если $p > 0$; расход., если $p \leq 0$. 10.282. Сход. 10.283. Расход.
 10.284. Расход. 10.285. Расход. 10.286. Сход. 10.287. Сход. 10.288. Расход.
 10.289. Сход. 10.290. Сход. 10.291. Сход. 10.292. Сход. 10.293. Сход.
 10.294. Сход. 10.295. Сход. 10.296. Сход. 10.297. Расход. 10.298. Расход.
 10.299. Сход. 10.300. Расход. 10.301. Сход. абс. 10.302. Сход. 10.303. Сход.
 абс. 10.304. Расход. 10.305. Сход. 10.306. Сход. абс. 10.307. 2. 10.308. $2 \ln 3$.
 10.309. $6\sqrt[3]{2}$. 10.310. 6. 10.311. π . 10.312. π . 10.313. 1. 10.314. $\frac{\pi}{2}$. 10.315. $\frac{16}{3}$.
 10.316. $2\sqrt{2}$. 10.317. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3} + 1)$. 10.318. $-1,768$. 10.319. 7,712. 10.320. $\frac{9\pi}{4}$.
 10.321. $\frac{625}{187}$. 10.322. 0. 10.323. $4a$. 10.324. $\frac{\pi a}{2}$. 10.325. $\frac{8}{3}$. 10.326. $\frac{\pi}{3}$.
 10.327. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10.328. $\sqrt[4]{125}$. 10.329. $\frac{256}{15}$. 10.330. $\frac{1}{\ln 2}$. 10.331. -1 . 10.332. $-\frac{1}{9}$.
 10.333. $-\frac{2}{e}$. 10.334. $\frac{1}{4}$. 10.335. $\frac{\pi^2}{8}$. 10.336. $\frac{3\pi^2}{8}$. 10.337. $\frac{3}{2}$. 10.338. $\frac{1}{1-\alpha}$,
 если $\alpha < 1$; Расход., если $\alpha \geq 1$. 10.339. Расход. 10.340. Расход. 10.341. Расход.
 10.342. Расход. 10.343. Расход. 10.344. Расход. 10.345. Расход. 10.346. Расход.
 10.347. Расход. 10.348. Расход. 10.349. Расход. 10.350. Сход. 10.351. Сход.
 10.352. Расход. 10.353. Сход. 10.354. Расход. 10.355. Расход. 10.356. Расход.
 10.357. Расход. 10.358. Расход. 10.359. Сход. 10.360. Сход. 10.361. Сход.
 10.362. Сход. 10.363. Сход. 10.364. Расход. 10.365. Расход. 10.366. Расход.
 10.367. Расход. 10.368. Сход. абс. 10.369. Сход. 10.370. Расход. 10.371. Сход.
 10.372. Расход. 10.373. Расход. 10.374. Расход. 10.375. Расход. 10.376. $\frac{4}{3}$.
 10.377. 121,5. 10.378. $\frac{32}{3}$. 10.379. $\frac{4}{3}$. 10.380. $\frac{10}{3}$. 10.381. $\frac{9}{2}$. 10.382. $\frac{32}{3}$.

$$\begin{aligned}
& 10.383. \frac{9}{2}. \quad 10.384. \frac{81}{2}. \quad 10.385. \frac{1}{6}. \quad 10.386. 9. \quad 10.387. 9. \quad 10.388. \frac{4}{3}. \quad 10.389. \frac{1}{3}. \\
& 10.390. 4,5. \quad 10.391. \frac{2}{3}. \quad 10.392. \frac{7}{3}. \quad 10.393. \frac{8\sqrt{2}-3}{6}. \quad 10.394. \frac{8}{3}. \quad 10.395. \frac{1}{3}. \\
& 10.396. 9. \quad 10.397. \frac{5}{3}. \quad 10.398. \frac{7}{4}. \quad 10.399. \frac{64}{3}. \quad 10.400. \frac{4}{3}. \quad 10.401. \frac{125}{6}. \quad 10.402. \frac{4}{3}. \\
& 10.403. \frac{7}{6}. \quad 10.404. \frac{8}{3}. \quad 10.405. \frac{8}{9}. \quad 10.406. \frac{1}{6}. \quad 10.407. \frac{1}{6}. \quad 10.408. 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right). \\
& 10.409. \frac{8}{15}. \quad 10.410. 13. \quad 10.411. \frac{125}{12}. \quad 10.412. 9. \quad 10.413. \frac{16}{3}. \quad 10.414. \frac{9}{2}. \\
& 10.415. 8. \quad 10.416. \frac{4}{3}(5\sqrt{10}-8). \quad 10.417. 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right). \quad 10.418. \frac{32\sqrt{6}}{3}. \quad 10.419. \frac{32}{3}. \\
& 10.420. \frac{32}{3}. \quad 10.421. \frac{4}{3}. \quad 10.422. \frac{16\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad 10.423. 2\pi + \frac{4}{3}. \quad 10.424. \frac{16}{3}. \\
& 10.425. \frac{32}{3}. \quad 10.426. \frac{8}{3}. \quad 10.427. \frac{125}{6}. \quad 10.428. 36. \quad 10.429. \frac{32}{3}. \quad 10.430. \frac{64}{3}. \\
& 10.431. \frac{125}{6}. \quad 10.432. \frac{125}{6}. \quad 10.433. \frac{125}{6}. \quad 10.434. \frac{125}{6}. \quad 10.435. \frac{1}{6}. \quad 10.436. \frac{9}{2}. \\
& 10.437. \frac{1}{2}. \quad 10.438. \frac{16}{3}. \quad 10.439. \frac{16}{3}. \quad 10.440. 36. \quad 10.441. 36. \quad 10.442. \frac{32}{3}. \\
& 10.443. \frac{9}{2}. \quad 10.444. 27. \quad 10.445. \frac{15-16\ln 2}{4}. \quad 10.446. \frac{6e-5}{3}. \quad 10.447. e^2-1. \\
& 10.448. \frac{1}{3}. \quad 10.449. \ln 2. \quad 10.450. \frac{8}{5}. \quad 10.451. \frac{3}{2}. \quad 10.452. 12-5\ln 5. \quad 10.453. 4-3\ln 3. \\
& 10.454. \frac{5}{2}-6\ln \frac{3}{2}. \quad 10.455. 5\ln \frac{6}{5}-\frac{1}{2}. \quad 10.456. \frac{3}{2}-\ln 2. \quad 10.457. \frac{9}{2}+9\ln 3. \\
& 10.458. 18. \quad 10.459. \frac{5}{12}. \quad 10.460. \frac{29}{2}+4\ln 2. \quad 10.461. \frac{3}{2}-\ln 2. \quad 10.462. 1-e^{-3}. \\
& 10.463. 2-\frac{1}{\ln 2}. \quad 10.464. \frac{1-\ln 2}{\ln 2}. \quad 10.465. \frac{3}{2}-\frac{1}{2\ln 2}. \quad 10.466. 1. \quad 10.467. e^2-3. \\
& 10.468. e^2+1. \quad 10.469. \frac{e-1}{e}. \quad 10.470. \pi-\frac{4}{3}. \quad 10.471. \frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}. \quad 10.472. \frac{9}{4}(\pi-2). \\
& 10.473. \frac{3}{4}\pi-1. \quad 10.474. 2. \quad 10.475. \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}. \quad 10.476. \frac{1}{3}. \quad 10.477. 2. \\
& 10.478. 2-\frac{3}{2}\ln 3. \quad 10.479. 16. \quad 10.480. 169\pi. \quad 10.481. 27\pi. \quad 10.482. 6\pi.
\end{aligned}$$

10.483. $\frac{16}{3}$. **10.484.** $\frac{128}{3}$. **10.485.** $\frac{9}{4}$. **10.486.** $\frac{9}{4}$. **10.487.** $4-3\ln 3$. **10.488.** 18 .
10.489. $\frac{4}{3}$. **10.490.** $\frac{4}{3}$. **10.491.** $\frac{2e^9}{6} - \frac{101}{6}$. **10.492.** $\frac{4\sqrt{2}-16+\pi\sqrt{2}}{16}$.
10.493. $\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{3}$. **10.494.** $\frac{125}{48}$. **10.495.** $\frac{125}{12}$.
10.496. $2ab\left(\pi - \arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\right) = 4ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. **10.497.** $25\pi + 40\sqrt{3}\ln 2$.
10.498. 27π . **10.499.** $\frac{125}{16}\pi$. **10.500.** $0,3\pi$. **10.501.** $\frac{4}{35}\pi$. **10.502.** $\frac{5\pi}{6}$.
10.503. $\frac{128\pi}{3125}$. **10.504.** 4π . **10.505.** $1394,24$. **10.506.** 32π . **10.507.** 12π .
10.508. $\frac{7\pi}{6}$. **10.509.** $\frac{\pi}{2}$. **10.510.** 2π . **10.511.** 64π . **10.512.** $21,6\pi$. **10.513.** $\frac{128\pi}{7}$.
10.514. $\frac{\pi}{30}$. **10.515.** $\frac{16\pi}{5}$. **10.516.** $\frac{44\pi}{7}$. **10.517.** $\frac{9\pi}{5}$. **10.518.** 5π . **10.519.** $\frac{5\pi}{14}$.
10.520. $\frac{26\pi}{5}$. **10.521.** $\frac{\pi}{5}$. **10.522.** $\frac{16\pi(5\pi+8)}{5}$. **10.523.** $\frac{875\pi}{48}$.
10.524. $\pi\left(\frac{6}{\ln^2 2} - \frac{5}{2\ln 2} - 4\right)$. **10.525.** $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$. **10.526.** $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **10.527.** $\frac{\pi^2}{4}$.
10.528. $\frac{\pi^2}{4}$. **10.529.** $4\pi^2$. **10.530.** $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$. **10.531.** $6\pi^2$. **10.532.** $\frac{3\pi}{10}$.
10.533. $\frac{\pi a^3}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **10.534.** $\frac{4\pi}{15}$. **10.535.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **10.536.** πa^3 . **10.537.** $\frac{\pi a^3}{2}$.
10.538. $\pi p a^2$. **10.539.** $\frac{\pi a^5}{20(\sqrt{p}+\sqrt{g})^4}$. **10.540.** $\frac{7}{6}\pi a^3$. **10.541.** $\frac{8}{3}\pi a^3$.
10.542. 20π . **10.543.** 70π . **10.544.** $\frac{\pi b^2 h^2 (h+3a)}{3a^2}$. **10.545.** $\frac{2\pi b^2 h (h^2+3a^2)}{3a^2}$.
10.546. $\frac{4\pi a b^2}{3}$. **10.547.** $\frac{\pi R^3 (10-3\pi)}{6}$. **10.548.** $\frac{4}{3}\pi a b^2$. **10.549.** $\frac{8\pi}{3}$. **10.550.** $\frac{128\pi}{15}$.
10.551. $\frac{512\pi}{15}$. **10.552.** $4,876$. **10.553.** $\frac{4\pi}{5}$. **10.554.** $\frac{64\pi}{5}$. **10.555.** 8π . **10.556.** π .
10.557. $19,2\pi$. **10.558.** 32π . **10.559.** π . **10.560.** $58,5\pi$. **10.561.** $\frac{512\pi}{7}$.

10.562. $\frac{64\pi}{3}$. **10.563.** $\frac{9\pi}{2}$. **10.564.** 6π . **10.565.** $\frac{8\pi}{15}$. **10.566.** $4\pi^2$. **10.567.** $8\sqrt{6}\pi$.
10.568. $\frac{4\pi}{15}$. **10.569.** $\frac{32\pi a^3}{105}$. **10.570.** $\frac{\pi^2}{2}$. **10.571.** $\frac{40\pi}{3}$. **10.572.** $\frac{\pi^2}{4}$.
10.573. $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$. **10.574.** $4\pi^3$. **10.575.** $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$. **10.576.** $\frac{\pi a}{15}$.
10.577. $2\pi k^2(b-a)$. **10.578.** $\frac{4\pi a^4}{3p}$. **10.579.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **10.580.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **10.581.** $\frac{4\pi a^2 b}{3}$.
10.582. $6\pi^3 a^3$. **10.583.** $\frac{\pi r^2 h}{2}$. **10.584.** $\frac{\pi h(8D^2+4Dd+3d^2)}{60}$. **10.585.** $2\pi a$.
10.586. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$. **10.587.** $2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})$. **10.588.** $6\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})$.
10.589. $\frac{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}{4}$. **10.590.** $12\frac{11}{27}$. **10.591.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **10.592.** 74 .
10.593. $\frac{232}{15}$. **10.594.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **10.595.** $\frac{\pi+1}{4}$. **10.596.** $\frac{14}{3}$. **10.597.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.
10.598. $2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$. **10.599.** $\frac{14}{3}$. **10.600.** $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$. **10.601.** $\frac{670}{27}$.
10.602. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. Указание: при вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$ приме-
нить подстановку $x = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$. **10.603.** $\frac{14}{3}$. **10.604.** $2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$.
10.605. $\frac{670}{27}$. **10.606.** $4\sqrt{3}$. **10.607.** $4+\frac{\ln 3}{4}$. **10.608.** $2+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
10.609. $\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}+4\sqrt{2}$. **10.610.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **10.611.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **10.612.** $\ln 3$.
10.613. $\ln(2+\sqrt{3})$. **10.614.** $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. **10.615.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **10.616.** $\frac{7}{6}$.
10.617. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **10.618.** $\frac{\pi^2 R}{2}$. **10.619.** $8a$. **10.620.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **10.621.** $6a$. **10.622.** $2\pi a$.
10.623. $\frac{a(e-e^{-1})}{2}$. **10.625.** $23; \frac{1}{4}(\sqrt{185}-3)$. **10.626.** $61; \frac{1}{3}(\sqrt{91}-1)$.
10.627. $\frac{1}{4}(e^4+7); \ln\frac{e^4-1}{4}$. **10.628.** $40,5; \frac{1}{4}(\sqrt{301}-3)$.
10.629. $\frac{15}{\ln 2}+4; \log_2(15\log_4 e)$. **10.630.** $32; \frac{\sqrt{97}-2}{3}$.

10.631. $\frac{26}{3\ln 3} + 1; \log_3(26 \log_{27} e)$. **10.632.** $31; \frac{1}{6}(\sqrt{181} - 1)$. **10.633.** $\frac{\pi}{4}$.
10.634. 160. **10.635.** $\ln \frac{17}{14} + 5$ **10.636.** $\frac{3}{4} \ln \frac{17}{13} + 4$. **10.637.** $\frac{68}{15}$. **10.638.** 32.
10.639. $16e^3 - 13$. **10.640.** $\frac{54e^5}{25} - \frac{49}{25}$. **10.641.** $\frac{1}{100}(299e^{50} - 249)$.
10.642. $\frac{1}{4}(9e^4 - 5)$. **10.643.** а) $\approx 30,5$; б) $\approx 62,7$; в) ≈ 715 .
10.644. а) $\sqrt{10} - 0,71$; б) $0,21 + \frac{1}{2}\sin^2 6$; в) $0,26 + 2(\sqrt{e^4 + 1} - \sqrt{2})$; г) $\frac{5641}{12}$.
10.645. а) π ; б) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; в) 8; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{5}{32}$; е) $\frac{3}{4}$. **10.646.** $\approx 31,73$ м;
10.647. 250 м; 25 м/с.

Глава 11

11.1. а) 1; б) 2; в) 4; г) 1; д) 2; е) 3. **11.2.** а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) да; з) да; и) да; к) да. **11.3.** а) $y = e^{2x}$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = 3e^{2x} + 5e^{-x}$.
11.4. а) $y = e^{2x}(2 - 4x)$. б) $y = e^{2x}(1 + x)$; в) $y = e^{2x}(3 - 2x)$. **11.5.** а) $y = x^3 + 2$;
 б) $y = (x - 1)^2$; в) $y = (x + 1)^3$; г) $y = x^2 + 4$; д) $y = \frac{1}{1 - x}$. **11.6.** а) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$;
 б) $y'\sqrt{1 - x^2} + xy = 0$; в) $y'\sin x = y \ln y$; г) $xy' + x + y = 0$; д) $yy' + \sqrt{1 - y^2} = 0$;
 е) $y'(1 + x^2) = xy(1 + y^2)$; ж) $xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$; з) $xy' = \sqrt{1 - y^2} \arcsin y$.
11.7. $y = C(x + 2) - 1$. **11.8.** $y = \ln(e^x + C)$. **11.9.** $y = -\frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}$.
11.10. $y = \operatorname{arctg}\left(C - \frac{2}{x}\right)$. **11.11.** $y = \frac{1}{C - \sin x}$. **11.12.** $y = \arcsin x + C$, $x = \pm 1$.
11.13. $(C - x)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm 1$. **11.14.** $y = \frac{(C + \cos x)^2}{4}$. **11.15.** $y = \frac{x + C}{1 - Cx}$.
11.16. $5\cos^5 x \cdot \ln Cy = -1$. **11.17.** $y = C(x^2 + 3)$; $y = x^2 + 3$.
11.18. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = Ce^{\operatorname{arctg} x}$; $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = e^{\operatorname{arctg} x}$. **11.19.** $y = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$ $y = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + \frac{4}{3}$.
11.20. $\operatorname{arctg} y = \ln Cx$. **11.21.** $y - \ln|y + 1| = C + x - 3\operatorname{arctg} \frac{x}{3}$.

11.22. $x^2 - \sqrt{1 - y^2} = C$, $y = \pm 1$; $y^2 = 1 - x^4$, $y = 1$. **11.23.** $\ln|xy| = C + x - y$.
11.24. $\sqrt{x^2 - 4x} = \operatorname{arctg} y + C$, $x = 0$, $x = 4$. **11.25.** $y = Ce^{\sqrt{9-x^3}}$, $x = \sqrt[3]{9}$.
11.26. $e^x - e^{-y}(y+1) = C$. **11.27.** $3y^2 + 2\ln^3 x = C$.
11.28. $2\left(\frac{\sqrt{y^5}}{5} - \frac{y^2}{4} + \frac{\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y}{2} + \sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1)\right) = C + \frac{1}{2}e^{-2x} - x$.
11.29. $x = \pm 1$, $C + \frac{2}{3}(\sqrt{\arccos x})^3 = y - \frac{y^2}{2} - \ln|y+1|$.
11.30. $\frac{1}{2}(\arcsin(\ln x) + \ln x \cdot \sqrt{1 - \ln^2 x}) - e^{-y} = C$. **11.31.** $y = Ce^{2\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$. **11.32.** $K = Cx$.
11.33. а) $y = Ce^{2\sqrt{t^2+1}}$; $y = e^{2\sqrt{t^2+1}-2}$; б) $y = C \ln t$; $y = \ln t$. **11.34.** $x^2 - 2Cy = C^2$.
11.35. $x^2 - y^2 = Cx$. **11.36.** $y = \frac{4x}{\ln|x| + C}$. **11.37.** $x \sin \frac{y}{x} = C$. **11.38.** $y \sin \frac{x}{y} = C$.
11.39. $e^{x/y} + \ln|x| = C$. **11.40.** $\ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C$. **11.41.** $y = x \ln(C + \ln|x|)$;
 $y = x \ln(1 + \ln x)$. **11.42.** $y = x(\ln|x| + C)$; $y = x(\ln x + 2)$. **11.43.** $y^3 = 3x^3 \ln|Cx|$.
11.44. $y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$; $y^2 = 2x^2 \ln|x|$. **11.45.** $y = xe^{Cx+1}$; $y = xe^{1-x}$.
11.46. $y = xe^{Cx}$; $y = xe^{2x}$. **11.47.** $xy(x+y) = C$. **11.48.** $2y^2 - 2xy + x^2 = C$.
11.49. $y^3 - 3x^2y - x^3 = C$. **11.50.** $\arcsin \frac{y}{x} = \ln|Cx|$, $y = \pm x$.
11.51. $x^2 + y^2 = Ce^{2\operatorname{arctg} y/x}$. **11.52.** $x = Ce^{\operatorname{arctg} y/x}$.
11.53. $y = Ce^{-2\sqrt{x/y}}$; $y = e^{2-2\sqrt{x/y}}$. **11.54.** $\ln|y| + \frac{x}{y} = C$.
11.55. $2x = (x-y)(C + \ln|x|)$. **11.56.** $2x^2 + xy - Cy = 0$. **11.57.** $ye^{y/x} = C$.
11.58. $x^2 + y^2 = Cy$. **11.59.** $y^3 = C(y^2 - x^2)$. **11.60.** $yx^6 = C(x+y)^6$.
11.61. $y = x + x(Cx+1)^2$, $y = x$. **11.62.** $\ln|Cx| = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x}\right)$.
11.63. $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$; $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. **11.64.** $(y-x+1)^2 \cdot (y+x-1)^5 = C$.
11.65. $6(y+1)^2 - 5(x+4)(y+1) + (x+4)^2 = C$.
11.66. $\left(5(y+5)^2 + 2(y+5)(x-9) - (x-9)^2\right)^3 \left(\frac{5y+x+16-\sqrt{6}(x-9)}{5y+x+16+\sqrt{6}(x-9)}\right)^{\sqrt{6}} = C$.

$$11.67. \left(3(y-1)^2 - 4x^2\right)^6 \left(\frac{\sqrt{3}(y-1)-2x}{\sqrt{3}(y-1)+2x}\right)^{\sqrt{3}} = C. \quad 11.68. (y-2x)^3 = C(y-x-1)^2.$$

$$11.69. \ln|2x-3| = C + \frac{4y+5}{2x-3}. \quad 11.70. \ln|y-x-1| = C - \frac{x-2}{y-x-1}.$$

$$11.71. (y+2x-3)^2 = C(y+3x-2,5).$$

$$11.72. \left((y-11)^2 - 2(x+7)^2\right)^2 \left(\frac{y-11-\sqrt{2}(x+7)}{y-11+\sqrt{2}(x+7)}\right)^{\sqrt{2}} = C.$$

$$11.73. \ln|y+2| + \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3} = C. \quad 11.74. p_t = x_t \ln^2 \frac{C}{\sqrt{x_t}}. \quad 11.75. p_t = x_t e^{-x_t}.$$

$$11.76. y = (x+C)(1+x^2). \quad 11.77. y = (\arcsin x + C)\sqrt{1-x^2}. \quad 11.78. y = \frac{x^2 + C}{\cos x}.$$

$$11.79. y = \sin x + C \cos x. \quad 11.80. y = (x+C)x. \quad 11.81. y = (x^2 + C)(x^2 + 1).$$

$$11.82. yx^3 = 2x + C; \quad y = \frac{2x-1}{x^3}. \quad 11.83. y = Cx^4 - \frac{1}{4}. \quad 11.84. y = (x+C)e^{2x}.$$

$$11.85. y = e^x(\ln|x| + C). \quad 11.86. y = Ce^{5x} - 0,1e^{-5x}; \quad y = -0,1e^{-5x}.$$

$$11.87. y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \quad 11.88. yxe^x = x^3 + C; \quad yxe^x = x^3 - 1.$$

$$11.89. y = (2e^{x/2} + C)x. \quad 11.90. y = e^{x^2}(C + x); \quad y = e^{x^2}(1 + \operatorname{arctg} x).$$

$$11.91. y = e^{-x}(\operatorname{arctg} x + C); \quad y = e^{-x}(\operatorname{arctg} x + 2). \quad 11.92. y(x^2 + 1)^3 = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11.93. y = e^{-1/x}(e^x + C). \quad 11.94. y = C \sin x - \cos x; \quad y = \sin x - \cos x.$$

$$11.95. y = 2 + C \cos x; \quad y = 2 - 3 \cos x.$$

$$11.96. y \cos^2 x = 2 \sin x + C; \quad y \cos^2 x = 2 \sin x + 3. \quad 11.97. y = (C - 2 \cos x) \cos x.$$

$$11.98. y = e^{-\cos x}(C - \cos x); \quad y = e^{-\cos x}(3 - \cos x). \quad 11.99. y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}.$$

$$11.100. y = \frac{1}{x}(C + 0,5 \arcsin^2 x). \quad 11.101. y = (x+C) \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad y = \left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$11.102. y = C \operatorname{tg} x - \sin x. \quad 11.103. y = (x+C) \operatorname{ctg} \frac{x}{2}; \quad y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$11.104. y = e^{-x^3} \left(\ln(e^{x^3+x} + 1) + C \right); \quad y = e^{-x^3} \ln \frac{1 + e^{x^3+x}}{2}.$$

$$11.105. y = C \ln^2 x - \ln x; \quad y = \ln^2 x - \ln x. \quad 11.106. 2y \ln x = x^2 + 10 \ln x + C.$$

$$11.107. yx^2 = x \ln x - x + C; \quad yx^2 = x \ln x - x + e^2. \quad 11.108. y = x + 1 + Ce^{-x}.$$

$$11.109. y = Ce^{x^2} - (x^2 + 1). \quad 11.110. y = Cx^4 e^{1/x} + 6x^4 + 6x^3 + 3x^2.$$

- 11.111. $y = Ce^x - x^2 - 2x - 2$. 11.112. $x = y^2 + Cy$; $x = y^2 - y$.
- 11.113. $x = y^3 + y^2 + C/y$; $x = y^3 + y^2$. 11.114. $x = Cy^3 + y^2$; $x = y^2 - y^3$.
- 11.115. $x = e^y + Ce^{-y}$; $x = e^y - e^{-y}$. 11.116. $2xe^{y^2} = \ln(e^{y^2} + 3) + C$.
- 11.117. $2x \cos y = C - \cos 2y$; $2x \cos y = -\cos 2y$. 11.118. $x(y-1)^2 = y - \ln|y| + C$;
 $x(y-1)^2 = y - \ln|y| - 1$. 11.119. $x = \sin y(C - \cos y)$; $x = -\sin y \cos y$.
- 11.120. $x = Cy^2 + 2 \ln y - y + 1$; $x = 2 \ln y - y + 1$. 11.121. $x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2$.
- 11.122. $y = \frac{1}{x(C - \ln|x|)}$. 11.123. $y = x^4(\ln \sqrt{x} + C)^2$; $y = 0$.
- 11.124. $y = \frac{1}{Cx - x^3 - x \ln|x|}$. 11.125. $y^2 = x - 1 + Ce^{-x}$.
- 11.126. $y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x} \right)^2$; $y = 0$.
- 11.127. $y = 1/(Cx + \ln x + 1)$. 11.128. $y = 1/(Ce^{x^2} + x^2 + 1)$. 11.129. $4x^2 + y^2 = Ce^{-2x}$.
- 11.130. $y = (Ce^{-x/2} + x - 2)^2$, $y = 0$. 11.131. $y = \frac{x^2}{C(x-1)+1}$.
- 11.132. $x = 1/(y(C + \ln|y|))$. 11.133. $x = 1/(y(C - \ln^2 y))$. 11.134. $y = 2t + e^{2t} + 1$.
- 11.135. $y = 4t + 3e^{4t} + 1$. 11.136. $p = \frac{15}{4}t - \frac{77}{16} + Ce^{-4t/3}$. 11.137. $p = 30 + 6e^{-t/9}$.
- 11.138. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$. 11.139. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$. 11.140. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.
- 11.141. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$. 11.142. $y = C_1 e^{10x} + C_2 e^{-9x}$. 11.143. $y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{3x}$.
- 11.144. $y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{-5x}$. 11.145. $y = C_1 e^{9x} + C_2 e^{4x}$. 11.146. $y = e^x(C_1 + C_2 x)$.
- 11.147. $y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x)$. 11.148. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.
- 11.149. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. 11.150. $y = C_1 \cos \frac{x}{4} + C_2 \sin \frac{x}{4}$.
- 11.151. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. 11.152. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
- 11.153. $y = C_1 + C_2 e^{4x}$. 11.154. $y = e^{-10x}(C_1 + C_2 x)$. 11.155. $y = e^{-0,25x}(C_1 + C_2 x)$.
- 11.156. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$. 11.157. $y = e^{0,2x}(C_1 + C_2 x)$.
- 11.158. $y = e^{7x}(C_1 + C_2 x)$. 11.159. $y = e^{\frac{1}{7}x}(C_1 + C_2 x)$.

11.160. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$. **11.161.** $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.
11.162. $y = C_1 + C_2e^{-3x}$. **11.163.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. **11.164.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^{2x}$.
11.165. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. **11.166.** $y = e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.
1.167. $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
11.168. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 0,5\left((x - \ln(e^x + 1))e^x + (-e^x + \ln(e^x + 1))e^{-x}\right)$.
11.169. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0,5x \sin 2x + 0,25 \cos 2x \ln |\cos 2x|$.
11.170. $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right)$. **11.171.** $y = C_1 + C_2e^x - \operatorname{cose}^x$.
11.172. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|$.
11.173. $y = e^{2x} \cos x (C_1 - \ln |\cos x|) + e^{2x} \sin x (C_2 + x)$. **11.174.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x -$
 $-1,2(\sqrt{x+1})^5 + 2(\sqrt{x+1})^3 + 2x(\sqrt{x+1})^3)$. **11.175.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 -$
 $-2 \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$. **11.176.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) - xe^{-x} + xe^{-x} \ln |x| + 0,25xe^x - 0,25e^x$.
11.177. $y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{x}$. **11.178.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 4\sqrt{x}$. **11.179.** $\varphi(x) =$
 $= A \cos 3x + B \sin 3x$. **11.180.** $\varphi(x) = A \cos 4x + B \sin 4x$. **11.181.** $\varphi(x) = Ax^3 + Bx^2 +$
 $+ Cx + D$. **11.182.** $\varphi(x) = e^x(A \cos x + B \sin x)$. **11.183.** $\varphi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
11.184. $\varphi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **11.185.** $\varphi(x) = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$.
11.186. $\varphi(x) = e^x(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$. **11.187.** $\varphi(x) = (Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x$.
11.188. $\varphi(x) = e^{4x}(Ax^3 + Bx^2)$. **11.189.** $\varphi(x) = A \cos 2x + B \sin 2x + Ce^x$.
11.190. $\varphi(x) = e^x((Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x)$.
11.191. $\varphi(x) = (Ax^2 + Bx) \cos 6x + (Cx^2 + Dx) \sin 6x$.
11.192. $\varphi(x) = Ax + B + Cxe^x$. **11.193.** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - 2x - 0,5$.
11.194. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 3x$. **11.195.** $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - 2x^2 + 3x - 3$.
11.196. $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$.
11.197. $y = -x^2 + x + e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.
11.198. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 2e^{-x}$. **11.199.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{7x} - xe^{2x}$.
11.200. $y = C_1e^{4x} + C_2e^x - 2xe^x$. **11.201.** $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x) + 2e^x$.
11.202. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + 2x^2)$. **11.203.** $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3xe^{2x}$.

- 11.204. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + e^{2x}(x^3 - x^2 + x)$.
- 11.205. $y = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \sin x - 2 \cos x$.
- 11.206. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 0,2(\cos x - \sin x)$.
- 11.207. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \sin x - 4 \cos x$.
- 11.208. $y = e^{-3x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + 1,4 \sin 2x - 0,8 \cos 2x$.
- 11.209. $y = e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) - 1,5 \sin 2x + \cos 2x$.
- 11.210. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) - 2 \sin 3x$. 11.211. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 \sin x$.
- 11.212. $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + x^2 \sin 3x$.
- 11.213. $y = e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + e^{-x} \times (-\sin 2x + 0,5 \cos 2x)$.
- 11.214. $y = e^x((C_1 + x) \sin x + (C_2 - x^2) \cos x)$.
- 11.215. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} + e^{2x} + 2x^2 - 3x + 2$.
- 11.216. $y = C_1 + C_2 e^x - 2e^{3x} - x^3 - 3x^2 - 6x$.
- 11.217. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x + 2x \sin x$. 11.218. $y = C_1 \sin x + -3 \cos 2x$.
- 11.219. $y = (1 - \pi/2) \sin x + \cos x + x$. 11.220. $y = 3x^2 e^{-2x}$.
- 11.221. $y = 4e^{2x} - e^x + x^2 + 2x$. 11.222. $y = -2e^x - 4xe^x + 3 \sin 2x$.
- 11.223. $y = 3e^{7x} \sin 2x + x^3 + x$. 11.224. $y = 0,1e^{2x}(\sin x - 2 \cos x) + 0,75e^x - 0,55e^{-x}$.
- 11.225. $y = e^{3x}(4 \cos 4x - 3 \sin 4x) + 2x \sin 3x$.
- 11.226. $y = -4e^{2x} + 0,5e^x + e^{3x}(x^2 - 3x + 3,5)$.
- 11.227. $y = e^{-x}(2 \cos 2x + 3 \sin 2x) + 2xe^{-x} \cos 2x$.

Глава 12

- 12.1. а) $\frac{3}{4} + \frac{5}{5} + \frac{7}{6} + \frac{9}{7}$; б) $\frac{2}{1!} - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} - \frac{2^4}{4!}$. 12.2. $\frac{1}{2}$. 12.3. $\frac{2}{3}$. 12.4. $\frac{23}{90}$. 12.5. 3.
- 12.6. $\frac{9}{8}$. 12.7. $\frac{1}{4}$. 12.8. Расход. 12.9. Расход. 12.10. Расход. 12.11. Расход.
- 12.12. Расход. 12.13. Расход. 12.14. Расход. 12.15. Расход. 12.16. Расход.

12.17. Сход. **12.18.** Расход. **12.19.** Сход. **12.20.** Сход. **12.21.** Расход.
12.22. Расход. **12.23.** Сход. **12.24.** Сход. **12.25.** Расход. **12.26.** Сход. **12.27.** Сход.
12.28. Сход. **12.29.** Расход. **12.30.** Расход. **12.31.** Сход. **12.32.** Расход.
12.33. Сход. **12.34.** Сход. **12.35.** Сход. **12.36.** Сход. **12.37.** Расход.
12.38. Сход. **12.39.** Сход. **12.40.** Сход. **12.41.** Расход. **12.42.** Сход.
12.43. Расход. **12.44.** Сход. **12.45.** Расход. **12.46.** Сход. **12.47.** Сход. абс.
12.48. Сход. абс. **12.49.** Расход. **12.50.** Сход. усл. **12.51.** Сход. усл. **12.52.** Расход.
12.53. Сход. усл. **12.54.** Сход. абс. **12.55.** Сход. абс. **12.56.** Сход. абс.
12.57. Сход. усл. **12.58.** Сход. усл. **12.59.** Сход. усл. **12.60.** Сход. абс.
12.61. 0,78. **12.62.** 0,16. **12.63.** 0,45. **12.64.** 0,287. **12.65.** 0,625. **12.66.** 0,318.

Глава 13

13.1. $[-1,1)$. **13.2.** $[-3,-1)$. **13.3.** $(-\infty, +\infty)$. **13.4.** $[-6,8)$. **13.5.** $[-1,1]$. **13.6.** $[-5,1]$.
13.7. $(-2e, 2e)$. **13.8.** $(-4,-2)$. **13.9.** $(-4/e, 4/e)$. **13.10.** $(-\infty, +\infty)$. **13.11.** $[-2,0]$.
13.12. $(-\infty, +\infty)$. **13.13.** $[-1,1]$. **13.14.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. **13.15.** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. **13.16.** $\left(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$.
13.17. $[-3,3)$. **13.18.** $(-\infty, +\infty)$. **13.19.** $(-1,1]$. **13.20.** $(-e, e)$. **13.32.** 1,39; $\varepsilon = 0,01$.
13.33. 0,3050; $\varepsilon = 0,0000001$. **13.34.** 1,0122; $\varepsilon = 0,001$. **13.35.** 0,3413; $\varepsilon = 0,001$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Астровский А.И., Воронкова Е.В., Степанович О.П.* Высшая математика. 2-е изд. В 2 кн. Кн.1: Учебно- методический комплекс. – Мн.: Изд-во МИУ, 2007. – 384с.
2. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика, т.1. М., Дрофа, 2004. – 284 с.
4. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие/Под ред. В. Ф. Бутузова. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 248 с.
5. *Гусак А.А.* Задачи и упражнения по высшей математике: В 2 ч. Ч. 1.: Для вузов. – 2-е изд., перераб. – Мн.: Высш. шк., 1988. – 247 с.: ил.
6. *Гуринович С.Л.* Математика. Задачи с экономическим содержанием: пособие. – Мн. Новое знание, 2008. – 264с.
7. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожеевникова Т.Л.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.1. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш.шк., 1986. – 304с.
8. *Жевняк Р.М., Карпук А.А.* Высшая математика: [Учеб. пособие для втузов]. Ч. II. – Мн.: Высш. шк., 1985. – 221 с.: ил.
9. *Кастрица О.А.* Высшая математика: Учебное пособие. – Мн.: Новое знание, 2005. – 491с.
10. *Кастрица О.А.* Высшая математика: примеры, задачи, упражнения: Учебное пособие для вузов. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 254с.
11. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005. – 464 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
12. *Красс М.С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании /М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2006.
13. *Красс, М.С.* Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2004.
14. *Кремер Н.Ш., Путько Б.А., Тришина И.М., Фридман М.Н.* Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (часть I) / Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Высшее образование, 2005. – 486 с.

15. *Кремер Н.Ш., Путько Б.А., Тришина И.М., Фридман М.Н.* Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (часть II) / Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Высшее образование, 2005. – 407 с.
16. *Лихолетов И.И., Мацкевич И.П.* Руководство к решению задач по высшей математике и математической статистике. Мн., 1976. – 456 с.: ил.
17. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Г., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Рольф, 2001. – 576 с.
18. *Малугин В.А.* Линейная алгебра. – М., Эксмо, 2006. – 215 с.
19. *Малугин В.А.* Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2005. – 272 с.
20. *В.П. Минорский.* Сборник задач по высшей математике. – М., 1969. – 352 с.: ил.
21. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М., Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
22. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учеб. пособие / А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова, Е.И.Шилкина и др. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 284 с.: ил.
23. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике. Учебник. В 2-х частях. – М.: Финансы и статистика, 2000, 224с., 376 с.
24. Справочник по математике для экономистов. Под ред. Ермакова В.И. – М.: Выш. шк., 1997. – 384 с.
25. *Сухая Т.А., Бубнов В.Ф.* Задачи по высшей математике: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 416 с.: ил.
26. *Сухая Т.А., Бубнов В.Ф.* Задачи по высшей математике: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 303 с.: ил.
27. *Шилкина, Е.И.* Высшая математика. /Е.И. Шилкина. – Минск: БГЭУ, 2003. – Ч.1.
28. *Шилкина, Е.И.* Высшая математика / Е.И. Шилкина, М.П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2005. – Ч.2.