МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

М.П. Дымков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Первый семестр

Курс лекций
для студентов экономических
специальностей вузов

Минск 2014

Часть I. Линейная алгебра

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ.

- Векторы и операции над ними.
- Понятие n-мерного векторного пространства
- Скалярное произведение векторов
- Угол между n-мерными векторами
- Линейная зависимость векторов
- Базис и ранг системы векторов
- Ортонормированный базис

§ 1. Векторы и операции над ними.

В своей практической деятельности человек встречается с величинами различного рода. Одни из них, например, площадь, объем, масса, температура полностью характеризуются заданием своих численных значений. Такие величины называются **скалярными**. Другие же величины, например, сила, скорость, ускорение определяются не только своим числовым значением, но и направлением их действия. Такие величины называют **векторными**. При этом для анализа векторных величин с одинаковым успехом используют как геометрическую, так и алгебраическую формы их представления.

В геометрии вектором называют направленный отрезок. Геометрическое представление вектора на плоскости приводилось в школе, и поэтому не будем его здесь в деталях приводить.

Для *алгебраического* описания векторов их связывают с некоторой системой координат. В фиксированной системе координат, например, в плоскости каждый вектор $\vec{a}$ определяется однозначно своими двумя координатами: $\bar{a} = (a_1,\ a_2)$; вектор в пространстве — тремя координатами: $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$.

Замечание. При геометрическом изображении векторов часто используют понятие свободных и связанных векторов. Под связанным вектором понимают направленный отрезок прямой, у которого указано какой из концов является началом и концом. Длиной вектора называют расстояние (в выбранном масштабе) между конечными точками отрезка. Часто начало вектора не имеет значения, существенны лишь его длина и направление. Два вектора называют эквивалентными, если они имеют одинаковую длину и одинаково направлены (сонаправлены). Понятно, что если есть фиксированный связанный вектор, то ему соответствует бесконечно много эквивалентных ему связанных векторов. Все множество – это множество эквивалентных связанных векторов (пучок векторов) называют **свободным вектором**. Для задания свободного вектора достаточно задать какой-нибудь один его представитель, например, выходящий из начала координат. Тогда второй конец вектора однозначно определит единственную точку (a_1, a_2, a_3) – конец вектора (здесь говорим о векторах в пространстве). И наоборот, задав точку (a_1, a_2, a_3), мы физически задаем вектор с началом в начале координат, а конец – (a_1, a_2, a_3).

Приведем теперь *обобщение* понятия вектора на произвольный n-мерный случай. Такое обобщение естественно и диктуется приложениями. Часто приходится изучать объекты, для задания которых недостаточно задать 2 или 3 координаты. Например, положение самолета определяется в пространстве заданном 3-х координат его центра масс, 2-мя углами описывающие направление оси самолета, угол поворота самолета вокруг его оси (углы атаки, тангажа) и др. Другой пример, пусть некоторое предприятие в своем производстве использует n видов сырья. Тогда, если через $x_i, i = 1, 2, ..., n$ обозначить количество сырья i-го вида, необходимое предприятию на одни сутки, то тогда набор чисел $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ означает все сырье, которое использует предприятие в своем производстве в течение суток.

Определение 1. *Любой упорядоченный набор из n-действительных чисел* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *называется n-мерным вектором и обозначается* $\overline{x}$. *Числа* x_i, $i = 1, ..., n$, *составляющие упомянутый набор, называются компонентами (координатами) вектора* $\overline{x}$.

Часто вектор $\overline{x}$ будем писать просто как x (для упрощения записей без черты сверху, если это не будет приводить к недоразумению) так, что возможна запись вектора в виде $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Координаты n-мерного вектора можно расположить либо в строку $x = (x_1, \cdots, x_n)$, либо в столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Иногда в литературе предписывают записывать n-мерный вектор как вектор столбец и тогда для того, чтобы записать в виде строки используют операцию транспонирования

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Мы не будем следовать жесткому стилю обозначений.

Определение 2. *Два n-мерных вектора (т.е. два вектора с одним и тем же числом n координат)* $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *равны, тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты* $x_1=y_1, x_2=y_2, \ldots, x_n=y_n$.

Определение 3. *Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым* $\overline{0}=(0, 0, \ldots, 0)$.

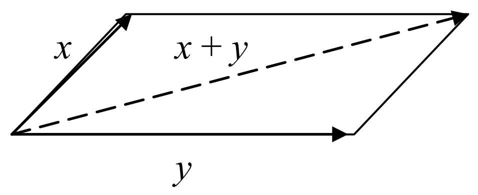
Наиболее частыми операциями, которые совершаются над векторами, является *сложение и умножение на число*.

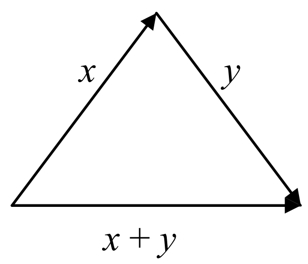
Определение 4. *Пусть даны два n-мерных вектора* $\overline{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\overline{y}=(y_1, \ldots, y_n)$. *Суммой* $\overline{z}$ *векторов* $\overline{x}+\overline{y}$ *называется вектор вида* $\overline{z}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ *и записывают как* $\overline{z}=\overline{x}+\overline{y}$.

Пусть λ *– любое действительное число. Произведением вектора* $\overline{x}$ *на число* λ *называется n-мерный вектор* $\overline{c}$ *вида* $\overline{c}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ *и записывают как* $\overline{c}=\lambda\cdot\overline{x}$.

Введенные выше две операции называют *линейными операциями*.

Замечание. При геометрическом изображении векторов сумму 2-х векторов можно находить по правилу параллелограмма





Позже убедимся, что такое определение приводит к тому же результату, что и ранее.

§ 2. Понятие *n*-мерного векторного пространства

Так как линейные операции (сложение и умножение на число) сводятся к операциям над их координатами, а они в свою очередь являются обычными действительными числами, то легко проверить справедливость следующих свойств введенных выше операций над векторами.

Пусть $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ – произвольные *n*-мерные векторы. Тогда:

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ – переместительный закон (или коммутативность);

2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ – сочетательный закон (или закон ассоциативности относительно сложения);

3) $\lambda\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$, где λ – действительное число (дистрибутивный закон относительно сложения векторов);

4) $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$, где λ, μ – действительные числа (дистрибутивный закон относительно сложения чисел);

5) $\lambda\left(\mu\overline{x}\right)=(\lambda\mu)\overline{x}$ – ассоциативный закон относительно умножения на числа;

6) $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$, где $\overline{0}=(0,\ \ldots,\ 0)$;

7) для любого вектора $\overline{x}$ существует такой вектор $\left(-\overline{x}\right)$, что $\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{0}$;

8) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$;

9) $0\cdot\overline{x}=\overline{0}$.

Определение 5. *Совокупность всех n-мерных векторов с линейными операциями (сложение и умножение на действительное число), подчиняющиеся свойствам 1) – 9), называется n-мерным* ***линейным*** *(или* ***векторным****) пространством. Если координаты векторов – действительные числа, то пространство называется* ***арифметическим*** *и обозначается* R^n.

Например, $R^1=R$ – множество действительных чисел – одномерное арифметическое пространство.

Отметим, что в определение векторного пространства не входит никакое умножение вектора на вектор.

Замечание. Множество всех векторов могут образовывать и другие алгебраические структуры , такие как группа, кольцо, тело, метрическое пространство и др. Эти структуры получаются, если при определении операций над векторами отказаться от некоторых привычных нам свойств или допустить другие операции (например, от свойства коммутативности, или ввести новую операцию умножения вектора на вектор и т.д.) .

Замечание. Линейные пространства могут быть образованы не только лишь с помощью векторов, эти пространства могут быть построены из объектов самой различной природы (возможность такого абстрагирования, а значит, и разработки универсальных методов исследования, отличает математику от других наук!). Например:

1) множество $P[x]$ всех многочленов от одной действительной переменной с действительными коэффициентами, если сложение и умножение на число определить обычным образом;

2)множество всех бесконечных последовательностей чисел $(x_1,...,x_n,....)$, если сложение и умножение определить покомпанентно;

3) множество $C[a,b]$ всех непрерывных на отрезке функций с поточечным заданием операций.

§ 3. Скалярное произведение векторов

Понятие n-мерного пространства R^n, при $n>3$ далеко не в полной мере обобщает привычные пространства R^2, R^3. Так, например, пока не определены понятия длины вектора, угла между векторами (например, как это представить в 5-мерном пространстве R^5). Оказывается, что положение можно исправить путем введения понятия скалярного произведения векторов.

Определение. *Скалярным произведением* $(\bar{x}, \bar{y})$ *двух векторов* $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\bar{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ *называется* ***число****, равное сумме произведений соответствующих (одноименных) координат*

$$(\bar{x},\bar{y}) = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_n\cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i .$$

Из данного определения следуют следующие основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;

2) $(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$;

3) $(\bar{x}+\bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{z})$;

4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ при $\forall \quad \bar{x} \neq 0$ и $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{0}$.

Для доказательства какого-либо из свойств 1) – 4) достаточно, например, найти числа в левой и правой частях соответствующих выражений и убедиться, что они равны. (Упр.)

Определение. *Векторное пространство с введенным в нем скалярным произведением называется* ***евклидовым пространством***.

Определение. *Длиной n-мерного вектора* $\bar{x}$ *называется* <u>*число*</u> $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ *(арифметическое значение квадратного корня). Длину вектора будем обозначать* $|\bar{x}|$ *или* $\|x\|$, *(чтобы не смешивать с понятием абсолютных величин).*

Таким образом, длина любого вектора есть $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ или $\|x\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Из свойства 4) следует, что каждый n-мерный вектор $\bar{x}$ обладает длиной, причем нулевой вектор $\bar{0}$ является единственным вектором, длина которого равна 0.

Иногда скалярное произведение $\left(\bar{x}, \bar{x}\right)$ называют **скалярным квадратом** вектора $\bar{x}$ и обозначают $\bar{x}^2$. Тогда из формулы длины вектора следует $\left|\bar{x}\right|^2 = \left(\bar{x},\ \bar{x}\right) = \bar{x}^2$, т.е. квадрат длины вектора равен скалярному квадрату. Можно доказать, что верно следующее утверждение.

Теорема. *Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – n-мерные векторы, то справедливы соотношения:*

1) $\left|\lambda\bar{x}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\bar{x}\right|$, где λ – число;

2) $\left|\left(\bar{x},\ \bar{y}\right)\right| \le \left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|$ – (неравенство Коши-Буняковского;

3) $\left|\bar{x} + \bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right| + \left|\bar{y}\right|$ – (неравенство треугольника).

Следствие. $\left|-\bar{x}\right| = \left|\bar{x}\right|$. Действительно, $\left|-x\right| = \left|(-1)\cdot\bar{x}\right| = \left|-1\right| \cdot \left|x\right| = \left|x\right|$

Определение. *Вектор называется **нормированным**, если его длина равна 1.*

Покажем, что каждый ненулевой вектор $\bar{x}$ можно нормировать. Для этого умножим вектор $\bar{x}$ на число $\lambda = \dfrac{1}{\left|\bar{x}\right|}$. Тогда

$$\left|\lambda \cdot \bar{x}\right| = \left|\frac{1}{\left|\bar{x}\right|} \cdot \bar{x}\right| = \left|\frac{1}{\left|\bar{x}\right|}\right| \cdot \left|\bar{x}\right| = \frac{\left|\bar{x}\right|}{\left|\bar{x}\right|} = 1,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Угол между *n*-мерными векторами

Из неравенства Коши-Буняковского $\left|\left(\bar{x},\ \bar{y}\right)\right| \le \left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|$ следует двойное неравенство

$$-\left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right| \le \left|\left(\bar{x},\ \bar{y}\right)\right| \le +\left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|$$

или если разделим его на $\left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|$, то получим

$$-1 \le \frac{(x,\ y)}{\left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|} \le 1. \qquad (1)$$

Определение. *Углом φ между ненулевыми n-мерными векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называется решение уравнения*

$$\cos\ \phi = \frac{(\bar{x},\ \bar{y})}{\left|\bar{x}\right| \cdot \left|\bar{y}\right|}, \qquad (2)$$

которое принадлежит отрезку $\left[0,\ \pi\right]$.

Из условия (1) следует, что уравнение (2) имеет на отрезке $[0,\ \pi]$ единственное решение при любых $\overline{x}\neq 0,\ \ \overline{y}\neq 0$ (что свидетельствует о корректности введенного выше определения).

Следствие. Перепишем равенство (2) в виде

$$(\overline{x},\ \overline{y})=\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|\cdot\cos\phi. \qquad (3)$$

Таким образом, скалярное произведение равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Замечание. Часто в качестве определения скалярного произведения векторов принимают равенство (3). В этом случае требуются некоторые пояснения понятия угла между векторами в n - мерном пространстве.

Определение. *1) Два ненулевых n-мерных вектора* $\overline{x}$ *и* $\overline{y}$ *называются* ***коллинеарными****, если угол между ними равен 0 или π. Если φ = 0, то векторы называют одинаково направленными, если* $\phi=\pi$*, то противоположно направленными.*
2) Два ненулевых n-мерных вектора $\overline{x}$ *и* $\overline{y}$ *называются* ***ортогональными****, если их скалярное произведение равно нулю* $\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)=0$ *(или угол между ними равен* $\frac{\pi}{2}$*).*

Можно показать, что верно следующее утверждение.

Теорема. *Ненулевые векторы* $\overline{x}$ *и* $\overline{y}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $(\Leftrightarrow)$*можно найти такое число λ, что* $\overline{x}=\lambda\cdot\overline{y}$.

Если векторы заданы своими координатами $\overline{x}=\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right),\ \overline{y}=\left(y_1,\ \ldots,\ y_n\right)$, то из условия равенства векторов $\overline{x}=\lambda\cdot\overline{y}$ или в координатной записи $\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)=\left(\lambda y_1,\ \ldots,\ \lambda y_n\right)$ следует, что векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства $x_i=\lambda\cdot y_i,\ \ i=\overline{1,n}$. Другими словами, векторы коллинеарны, когда одноименные координаты векторов пропорциональны (с одним и тем же коэффициентом пропорциональности $\lambda!$), т. е.

$$\frac{x_1}{y_1}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}=\lambda\ .$$

Замечание. При геометрическом изложении векторов, определение коллинеарных векторов звучит так: говорят, что векторы на плоскости (и в пространстве) коллинеарны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Далее, три вектора в пространстве называют компланарными, если эти векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Замечание. (Упр.*). Существуют, помимо скалярного произведения векторов, другие понятия произведения векторов. Например:

1) векторное произведение 2-х векторов $\left[\overline{x}\times\overline{y}\right]$, результатом которого является не число, а вектор;

2) смешанное (векторно-скалярное) произведение 3-х векторов $\left(\left[\overline{x}\times\overline{y}\right],\ \overline{z}\right)$, результатом которого является число.

Имеется определенный геометрический и физический смысл таких произведений. Например, векторное произведение используется для проверки коллинеарности векторов, вычислении площадей параллелограмма и треугольника, для нахождения линейной скорости вращения твердого тела). Смешанное произведение можно использовать для определения компланарности векторов, вычисления объема параллелепипеда, пирамиды и др.

§ 5. Линейная зависимость векторов

При решении различных задач, как правило, приходится иметь дело не с одним вектором, а с некоторой совокупностью векторов обычно одинаковой размерности, которую обозначим как

$$\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_k. \qquad (1)$$

Определение. *Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ – произвольные действительные числа.* ***Линейной комбинацией*** *векторов $\overline{a}_1,\ \ldots,\ \overline{a}_k$ называется вектор $\overline{b}$ вида*

$$\overline{b}=\lambda_1\overline{a_1}+\ldots+\lambda_k\overline{a_k},\quad \text{или}\quad \overline{b}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{a_i} \qquad (2)$$

Будем говорить, что заданный вектор $\overline{b}$ ***разлагается по векторам*** *$\overline{a}_1,\ \ldots,\ \overline{a}_k$* ***(линейно выражается)****, если найдутся числа $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k$ такие, что верно следующее равенство*

$$\overline{b}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{a_i}.$$

Замечание. Вспомним, что два вектора $\overline{b}$ и $\overline{a}$ называются коллинеарными, если $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, где λ – некоторое число. Поэтому в некотором смысле понятие линейной комбинации векторов обобщает понятие коллинеарных векторов. Здесь мы объединили две операции – сложение векторов и умножение векторов на число.

Пример. $\overline{a_1}=(1,\ 2,\ 0)$, $\overline{a_2}=(2,\ 1,\ 1)$, $\overline{a_3}=(-1,\ 1,\ -2)$. Пусть $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=4$. Тогда линейная комбинация векторов есть $\overline{b}=\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=$

(для вычислений удобнее столбцевая запись) $=2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\11\\-5\end{pmatrix}$.

Определение. *Будем говорить, что система векторов $\overline{a_1},\ \dots,\ \overline{a_k}$ является* ***линейно зависимой****, если существуют такие числа $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля (иногда этот факт записывают как $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \neq 0$), что верно равенство*

$$\lambda_1\overline{a_1}+\ldots+\lambda_k\overline{a_k}=\overline{0}, \tag{3}$$

т.е. линейная комбинация векторов равна нулевому вектору.

Если же равенство (3) возможно лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\ \ldots=\lambda_k=0$, то такая система векторов называется ***линейно независимой****.*

Простейшие свойства линейно зависимых и независимых векторов:

1) Нулевой вектор $\overline{0}$ разлагается по любой системе векторов, так как справедливо равенство $\overline{0}=0\cdot\overline{a_1}+\ldots+0\cdot\overline{a_k}$, с нулевыми коэффициентами.

2) Если вектор разлагается по части векторов, взятых из заданной совокупности, то он разлагается и по всей системе векторов (дополняя остальные слагаемые, например, нулевыми коэффициентами).

3) Каждый n-мерный вектор $\overline{b}=(b_1,\ \dots,\ b_n)$ разлагается по следующей **диагональной системе единичных** n-мерных векторов $\begin{pmatrix}e_1=(1,\ 0,\ \dots,\ 0)\\ e_2=(0,\ 1,\ \dots,\ 0)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e_n=(0,\ 0,\ \dots,\ 1)\end{pmatrix}$

в виде $\overline{b}=b_1\overline{e_1}+\ldots+b_n\overline{e_n}$.

Можно показать, что диагональные системы векторов $e_1,\ \dots,\ e_n$ – линейно независимы для любого целого числа n. $\left(\text{Упр.}^*\right)$

4) Если система векторов зависима, то в сумме (3) найдется слагаемое, у которого $\lambda_s \neq 0$, а значит, вектор $\overline{a_s}$ можно линейно выразить через остальные векторы (разделив все соотношения на λ_s и перенося в другую часть).

5) Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.

6) Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Три 3-мерных вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

7) Если система $\overline{a_1},\ \ldots,\ \overline{a_k}$ линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.
8) Наоборот, если в системе $\overline{a_1},\ \ldots,\ \overline{a_k}$ какая то ее часть линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Упр. – проверить свойства 1) – 8).

§ 6. Базис и ранг системы векторов

Выше мы показали, что любой n-мерный вектор $\overline{b}=\left(b_1,\ \ldots,\ b_n\right)$ можно разложить по диагональной системе единичных векторов $e_1,\ \ldots,\ e_n$. Возникает вопрос: существуют ли другие, отличные от единичных векторов, векторы такие, что любой n-мерный вектор можно представить как линейную их комбинацию? Если да, то как их описать?

Определение. *Пусть задана система векторов (1). Максимально независимой подсистемой совокупности (1) (векторов $a_1,\ \ldots,\ a_k$) называется любой* ***частичный*** *набор векторов этой системы, удовлетворяющий двум условиям:*

1) векторы этого частичного набора линейно независимы;

2) любой вектор исходной совокупности (1) линейно выражается через векторы этого частичного набора.

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, произвольно заданная совокупность векторов может иметь несколько различных максимальных линейно независимых подсистем. Однако, имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Все максимально независимые подсистемы заданной совокупности векторов имеют одно и то же число векторов.*

Это утверждение делает возможным следующее определение.

Определение. *Максимально независимая подсистема системы векторов называется ее* ***базисом****. Число векторов базиса называется* ***рангом*** *исходной системы векторов.*

Другими словами, ранг системы векторов – это максимальное число линейно независимых векторов системы.

Ясно, что если ранг системы векторов $a_1,\ \ldots,\ a_k$ меньше числа k, то эта система может иметь несколько базисов.

Замечание. Один из возможных способов вычисления ранга системы векторов непосредственно следует из определения (путем очевидного перебора различных комбинаций). О других способах вычисления ранга системы векторов будет сказано в Главе 2 (Матрицы).

Лемма. *Система векторов, состоящая более чем из n-штук n-мерных векторов, линейно зависима.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m$, $m > n$. Добавим к ней еще n штук единичных векторов $e_1, \ldots, e_n$. В расширенной системе $a_1, \ldots, a_m$, $e_1, \ldots, e_n$ векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис, так как они, во-первых, линейно независимы (пишут иногда сокращенно как **ЛНЗ**), и, во-вторых, любой вектор a_i является их линейной комбинацией (см. ранее)]. Значит, ранг расширенной системы равен n. Но и тогда и ранг исходной системы векторов равен n. А так как $m > n$, то исходная система векторов является линейно зависимой. ■

До сих пор мы говорили о конечной совокупности векторов $a_1, \ldots, a_k$ одинаковой размерности. Как быть, если рассмотреть систему векторов, содержащую бесконечное число векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$?

Доказанная лемма позволяет распространить понятие базиса и ранга и на бесконечную совокупность. Согласно этой лемме базис любой такой совокупности n-мерных векторов состоит из конечного числа векторов, не превосходящих числа n , где n – размерность пространства векторов, из которых образована данное множество векторов. Значит, мы можем говорить о базисе и ранге системы всех n-мерных векторов, т.е. всего n-мерного пространства R^n (см. ранее). Одним из базисов этого пространства является система единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, введенных выше.

С учетом сказанного выше можно сделать следующий вывод: в любом n-мерном векторном пространстве R^n существует много базисов; любой базис n-мерного векторного пространства R^n содержит ровно n-векторов.

Замечание. Существуют бесконечномерные линейные пространства. Например, пространство всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций имеет бесконечный базис вида $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Пусть система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ является базисом некоторой совокупности векторов, а вектор $\overline{b}$ является их линейной комбинацией

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k},$$

Имеет место следующая теорема

Теорема. *Разложение любого вектора конечномерного вектора в заданном базисе, если оно существует, единственно.*

Следствие. *Пусть теперь векторы $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ – базис пространства R^n. Тогда любой вектор из пространства R^n обязательно представим в виде разложения по базису*

$$\overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}.$$

*Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются **координатами** вектора $\bar{b}$ в базисе $a_1, \ldots, a_n$, и как следует из вышеприведенной теоремы это набор чисел единственный для заданного базиса.*

Ясно, что один и тот же вектор $\bar{b}$ в другом базисе (их же много!) будет иметь другие координаты.

Важность теоремы (следствие к ней) заключается в том, что на ее основе изучение множества векторов n-мерного пространства R^n, содержащего бесконечно много элементов, можно фактически свести к изучению конечного множества векторов базиса этого пространства.

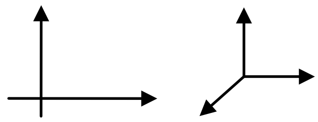
§ 7. Ортонормированный базис

Наиболее удобно изучать разложение n-мерных векторов по специальным базисам.

Рассмотрим базис пространства R^n, состоящий из ортогональных векторов (так называемый ***ортогональный базис***) , т.е система векторов вида :

$\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_n$, *для которых скалярное произведение* $\left(l_i, l_j\right) = 0$, *если* $i \neq j$ (4).

Замечание. Ортогональные базисы хорошо известны на плоскости и пространстве



Чем удобны такие базисы? Прежде всего тем, что координаты разложения произвольного вектора весьма просто определить.

Пусть требуется найти координаты разложения произвольного вектора $\bar{b}$ в базисе (4), т.е. надо найти числа α_i , $i = 1,...,n$ в равенстве

$$\bar{b} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{l}_n. \qquad (5)$$

Умножим скалярно обе части равенства (5) (это же векторы!) на вектор l_i, используя при этом свойства скалярного произведения векторов:

$$\left(\bar{b}, \bar{l}_i\right) = \alpha_1 \left(l_1, l_i\right) + \ldots + \alpha_i \left(l_i, l_i\right) + \ldots + \alpha_n \left(l_n, l_i\right).$$

Так как $\left(l_i, l_j\right) = 0$ для $i \neq j$, то получаем

$$\left(b, l_i\right) = 0 + \ldots + \alpha_i \left(l_i, l_i\right) + \ldots + 0.$$

Отсюда $\alpha_i = \dfrac{\left(b, l_i\right)}{\left(l_i, l_i\right)} = \dfrac{\left(b, l_i\right)}{\left|l_i\right|^2}$, $\qquad i = 1, 2, \ldots, n.$

Определение. *Ортогональные базисы вида (4), у которых $\| l_i \| = 1$, называют **ортонормированными базисами**.*

Координаты разложения в таком базисе имеют простой вид ─ это числа, которые вычисляются по формулам $\quad \alpha_i = \left(b, l_i\right)$, $i = 1,...,n$.

Глава II. МАТРИЦЫ И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

§ 1. Матрицы. Основные понятия

В этой главе введены новые объекты (сравните с введенными ранее понятиями: числа, векторы и др.) и основные операции над ними. Также показано как эти новые объекты можно использовать при решении конкретных задач. Как оказалось, матричное исчисление является весьма выразительным и компактным математическим аппаратом при моделировании многих процессов в различных областях.

Определение. *Прямоугольная таблица действительных чисел*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, называется (числовой) матрицей размера m x n.

(Заметим, что все строки (и все столбцы) имеют одинаковую длину – m и n !).

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются элементами матрицы. Каждый элемент a_{ij} снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которой расположен этот элемент.

Матрицы в дальнейшем будем обозначать заглавными буквами *A*, *B*, *C*, или $A_1, A_2, \dots$. Часто вместо подробной записи всей таблицы используют сокращенную запись вида $A = \left(a_{ij}\right)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ или $A = \left\|a_{ij}\right\|$, $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Когда существенным является указать лишь размеры матрицы, то матрицы иногда записывают как $A_{m \times n}$

Матрица, у которой $m = n$, называется **квадратной**.

Элементы квадратных матриц, стоящие на диагонали, идущей с верхнего левого угла, образуют так называемую **главную диагональ**. Элементы квадратных матриц, стоящие на диагонали, идущей с верхнего правого угла, образуют **побочную диагональ**.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если у неё ненулевыми элементами являются лишь элементы главной диагонали.

Квадратная матрица называется **симметрической**, если ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны.

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой**.

Если все ненулевые элементы диагональной матрицы равны 1, то такая квадратная матрица называется единичной, т.е., единичная матрица имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже (или выше) главной диагонали, равны 0, называется **треугольной** (нижне-треугольной или верхне-треугольной).

Отметим, что единичная E и нулевая O матрицы играют в матричном исчислении роль, в некотором смысле близкую к роли 1 и 0 в арифметике.

Матрицу, состоящую из одной строки и n столбцов, называют иногда матрицей-строкой. Аналогично говорят о матрице-столбце. Отметим здесь схожесть таких матриц с векторами. И поэтому их часто называют векторами.

Две матрицы A и B **называются равными** (и этот факт записывают как $A = B$), если они

1) имеют одинаковые размеры;
2) соответствующие элементы матриц равны, т.е.

$$a_{ij} = b_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ \ j = 1,\dots,n.$$

§ 2. Операции над матрицами

1. **Сложение матриц** вводится только для матриц одинаковых размеров. Суммой матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$, элементы которой есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\ \ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Кратко этот факт записывают как $C = A + B$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Аналогично определяется **разность матриц**.

2. **Умножение матрицы на число.**

Произведение матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на действительное число λ называется матрица, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы A на число λ

$$\lambda \cdot A = \left(\lambda \cdot a_{ij}\right).$$

Пример. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $\lambda=2$. Тогда матрица C имеет вид $C=2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

Свойства введенных операций сложения и умножения на число непосредственно вытекают из их определения.

Пусть A, B, C – матрицы, имеющие одинаковый размер, а α и β − некоторые действительные числа. Тогда верны следующие свойства:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = (\alpha A) \cdot \beta$;
6. $A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n}$;
7. $0 \cdot A_{m\times n} = O_{m\times n}$.

3. Произведение матрицы на матрицу.

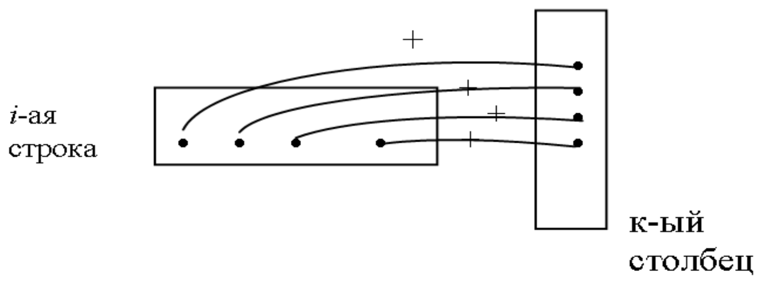
!!! *Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы (или еще говорят, когда матрицы согласованные)* !!!

Произведение матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p}=\left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p}=\left(c_{ik}\right)$, такая что

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk},\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Схематично вычисление элементов матрицы C можно изобразить как



Другими словами, при перемножении строки матрицы А на столбец матрицы В осуществляется обычное скалярное произведение двух векторов, причем координатами первого вектора являются элементы строки, а координатами второго вектора – элементы столбца.

Пример. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}_{2\times3}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{3\times4}$

Тогда $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{3\times4}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{23}\end{pmatrix}_{2\times4}$, где

$$c_{11}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=1\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot0=-1,$$

$$c_{12}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=1\cdot0+(-1)\cdot1+0\cdot1=-1,$$

$$c_{13}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=1\cdot2+(-1)\cdot1+0\cdot0=1,$$

$$c_{14}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot3+0\cdot(-1)=-4,$$

$$c_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=2\cdot1+1\cdot2+3\cdot0=4,$$

$$c_{22}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=2\cdot0+1\cdot1+3\cdot1=4,$$

$$c_{23}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=2\cdot2+1\cdot1+3\cdot0=5,$$

$$c_{24}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}=2\cdot(-1)+1\cdot3+3\cdot(-1)=-2.$$

Таким образом, матрица произведения имеет вид

$$C = AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отметим некоторые специфические особенности и свойства операции умножения матриц (при условии, что рассматриваемые там произведения матриц существуют), и которые легко проверить на примерах.

1. *Для прямоугольных матриц A и B из того, что существует произведение AB не следует, что существует произведение BA. Но даже, если это так, то* $\grave{A}\hat{A} \neq \hat{A}\grave{A}$*, вообще говоря*. (Упр. Проверить).

В связи с этим естественным является ввести следующее определение.

Матрицы называют **перестановочными**, если $AB = BA$.

2. *Если A и B – квадратные матрицы одного размера, то AB и BA*

существуют (как следует из предыдущего $AB \neq BA$, вообще говоря).

Степени квадратной матрицы определяются очевидным образом

$A^k = A \cdot \ldots \cdot A$, где k – целое число, A – квадратная матрица.

При этом, по определению полагают $A^0 = E, A^1 = A$

3. $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$, (если существуют указанные произведения).

4. $(A + B) \cdot C = AC + BC$.

5. $\alpha \cdot (AB) = (\alpha A) \cdot B$.

6. *Роль единичной (квадратной) матрицы: умножение слева, справа на данную матрицу не изменяют исходную матрицу*

$$E_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

$$A_{m\times n} \cdot A_{n\times n} = A_{m\times n}$$

$$\left(E_{m\times m} \cdot A_{m\times m} = A_{m\times m} \cdot E_{m\times m} = A_{m\times n}\right).$$

7. *Роль нулевой матрицы*

$$\left(O_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot O_{n\times n} = O_{m\times n}\right).$$

Отметим, что возможны случаи, когда $AB = O$, однако $A \neq O, B \neq O$

4. Транспонирование матрицы.

Матрица, строками которой являются столбцы матрицы А с тем же номером и сохранением порядка следования элементов, называется транспонированной к данной и обозначается как A^T *или* A'.

(Отметим, что при определении операции транспонирования вместо заменяемых столбцов исходной матрицы можно говорить о замене ее строк!)

Пример. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$

(сравните с понятием транспонирования векторов).

В общем случае для квадратных матриц $A \neq A^T$. Легко проверить, что если $A=A^T$, то матрица А называется симметрической.

Свойства операции транспонирования.

1. $\left(A^T\right)^T=A$; 2. $\left(AB\right)^T=B^TA^T$; 3. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$; 4. $\left(\alpha A\right)^T=\alpha A^T$.

Заметим, что если A – квадратная симметрическая матрица, то $A^T=A$.

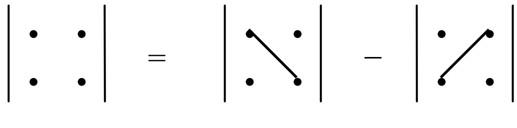
§ 3. Определитель матрицы

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрице A можно поставить в соответствие действительное число $\det A$ (иногда обозначают это число как $|A|$ или Δ), которое называется **определителем** (детерминантом) матрицы , Введем понятие определителя матрицы для $n=1,2,3,\ldots$ по мере роста размеров квадратной матрицы следующим образом:

1. При $n=1$, т.е если $A=a_{11}$, то положим $\det A=a_{11}$.

2. При $n=2$, т.е если $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, то положим

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}.$$

Символически 

Пример. $\det A=\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 7\end{vmatrix}=3\cdot 7-(-2)\cdot 5=21+10=31$

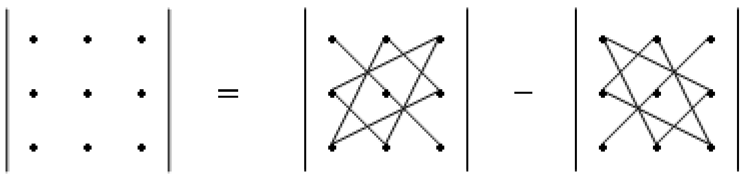
3. При $n = 3$, т.е. если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Или, если воспользоваться предыдущим, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ -(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}). \end{array}$$

Для облегчения запоминания удобно воспользоваться правилом треугольников (или правило Саррюса)



4. Общее определение может быть дано следующим образом.

Определение. *Определителем квадратной матрицы A n-го порядка называется* ***алгебраическая*** *сумма* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *произведений n-го порядка (т.е. каждое произведение содержит n сомножителей) элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы. Знак каждого слагаемого определяется с помощью подсчета так называемых инверсий в перестановке чисел (1, 2, ..., n).*

Как видно, при $n > 3$ правила (определения) вычисления определителя сложны для восприятия и их непосредственного применения. Однако, известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высокого порядка на основе вычисления определителей низшего порядка. Один из таких методов основан на разложении определителя по элементам некоторого ряда (в дальнейшем строки и столбцы будем просто называть рядами). Этот способ вычисления определителей матриц будет показан ниже.

Вычисление определителей облегчает знание его основных свойств. Эти свойства легко проверить, например, при $n = 2, 3$.

Основные свойства определителей.

1. $\det A = \det A^T$.

2. *Если строка (или столбец) матрицы* A *нулевые, то* $\det A = 0$.

3. *При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы определитель меняет знак (сохраняя при этом свое числовое значение по абсолютной величине).*

4. *Определитель матрицы, содержащий две одинаковые строки (столбца) равен 0.* (Действительно, поменяв местами строки, имеем согласно предыдущего свойства, что $\Delta_{\text{íîâ}} = -\Delta_{\text{ñòàð}}$, а это возможно если только $\Delta \;\; = 0$.)

5. Общий множитель любой строки (т.е. если все элементы имеют один и тот же множитель!) можно вынести за знак определителя.

6. Из свойств 4 – 5 следует, что *определитель с двумя пропорциональными рядами равен 0*. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

6. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей.* Например, при $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta'_3 + \Delta''_3$$

7. *Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число*. (Это свойство есть следствие свойств 3) −7). Это свойство еще называют элементарным преобразованием определителя.

Замечание. Из перечисленных свойств следует, что определитель равен 0, если, по крайней мере, одна из строк (столбцов) является линейной комбинацией других его строк (столбцов). При этом, определение линейной комбинации аналогично данному ранее для векторов. Это естественно, так как каждую строчку (можно рассматривать как вектор (это же тоже набор чисел – только здесь разделяем их запятой)). Отсюда вытекает **необходимое и достаточное** условие равенства нулю определителя: ***определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.***

Для дальнейшего изучения матриц и их определителей нам понадобится понятие миноров и алгебраических дополнений элементов матриц.

Определение. ***Минором*** M_{ij} *элемента* a_{ij} *квадратной матрицы* $A_{n\times n}$ *называется определитель матрицы (n – 1) порядка, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент* a_{ij}

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & |a_{1j}| & \dots & a_{1n} \\ \overline{\underline{a_{i1}}} & \dots & \overline{\underline{|a_{ij}|}} & \dots & \overline{\underline{a_{in}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & |a_{nj}| & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} *элемента* a_{ij} *называется число* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, *т.е. это минор со знаком «+», если число* $(i+j)-$*четное, и со знаком «−», есле нечетное* .

Миноры и алгебраические дополнения играют важную роль в матричном исчислении. В частности, они используются для вычисления определителей матриц высокого порядка.

8. Разложение определителя по элементам некоторого ряда.

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (1 \le i \le n).$$

Аналогичное утверждение верно для столбцов матрицы.

Эта важная формула – она сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей (n -1)-го порядка, и таким образом, после многократного ее применения позволяет свести к вычислению определителей порядка 2 и 3.

Замечание. 1) Объем вычислений уменьшается, если ряд имеет нуль. Иногда с этой целью перед вычислением определителя осуществляют его элементарные преобразования (см. свойство 8), а затем уже реализуют его вычисление.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Вычтем из элементов второго столбца элементы первого, умноженные на 3, а из элементов третьего столбца вычтем соответствующие элементы первого, умноженные на 4. Полученный определитель вычислим посредством его разложения по первой строке. Получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 10 + 5 = 15 .$$

2) Существуют обобщение свойства разложения – можно осуществить разложение не по одному ряду, а по нескольким одновременно (теорема Лапласа).

9. (сравните со свойством 8). *Сумма произведений элементов какого-либо ряда на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.*

Например, сумма элементов первой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов второй строки равно

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0 .$$

§ 4. Обратная матрица

Пусть $A_{n\times n} = \left(a_{ij}\right) -$ квадратная $n\times n$ матрица.

Определение. *Говорят, что матрица A невырожденная, если* $\det A \neq 0$. *В противном случае т.е если* $\det A = 0$, *матрица A называется* ***вырожденной матрицей***.

Замечание. Можно показать, что матрица невырожденная тогда и только тогда, когда ее строки линейно независимы.

Определение. *Матрица* A^{-1} *называется обратной к матрице A, если выполнено условие* $A^{-1}\cdot A = AA^{-1} = E_{n\times n}$.

(Сравните с понятием обратных чисел, введенное для ненулевых действительных чисел $a\cdot a^{-1} = 1$. Не путайте обозначение A^{-1} с отрицательными показателями, введенные только для действительных чисел. Запись $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ не имеет смысла !)

Теорема. *Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную, причем она единственная.*

Напомним, что если $a \neq 0$, то a^{-1} – единственно.

Свойства обратной матрицы.

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (сравните с операцией транспонирования);

3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Решение матричных уравнений.

Матричным *называется уравнение, в котором роль неизвестного играет некоторая матрица X.*

Простейшими примерами таких уравнений могут служить выражения вида

$$A \cdot X = C,\ X \cdot B = C,\ A \cdot X \cdot B = C,$$

где X и C – прямоугольные матрицы равных размеров, а A и B – квадратные матрицы таких размеров, что имеют смысл выписанные произведения матриц (говорят еще, что матрицы имеют согласованные размеры).

Если A и B невырожденные матрицы, то умножая данные выражения слева и\или справа на соответствующие обратные матрицы, легко получить решения этих уравнений

$$X = A^{-1}C,\quad X = CB^{-1},\ X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Эти и другие задачи показывают, что необходимо уметь находить обратные матрицы.

Существует несколько способов нахождения A^{-1}.

1. Пусть $A_{n\times n} = \left(a_{ij}\right) -$невырожденная матрица $\det A \neq 0$.

Определение. Матрицей, присоединенной к A (или говорят еще союзной) называется матрица вида $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где $A_{ij} -$алгебраическое дополнение к a_{ij}.

Замечание. A^* имеет транспонированный характер, т.е. $A^* -$это матрица, элементы которой являются алгебраическим дополнением к транспонированной матрице A^T.

Можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема. $A^* \cdot A = E \cdot \det A$.

Упр.* Доказать для $n = 3$.

Отсюда легко получить способ вычисления обратной матрицы

Следствие. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{*}$.

Пример. Вычислить обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Союзная матрица имеет вид : $A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, где алгебраические дополнения есть:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1,\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 1,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -2,\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 3.$

Определитель исходной матрицы $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 5$.

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

<u>Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований</u>

Определение. *Элементарными преобразованиями строк матрицы будем называть:*

1) перемену двух строк местами;

2) умножение всех элементов строки на число, не равное нулю;

3) прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на некоторое (одно и то же) число.

Как эти преобразования используются для вычисления A^{-1}?
Составим расширенную матрицу

$$\left[A \vdots E\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Над полученной прямоугольной матрицей осуществим элементарные преобразования строк (см. далее метод Гаусса) до тех пор, пока не получим матрицу вида

$$\left[E \vdots B\right] = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \dots & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & & & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right),$$

Так как

$$A^{-1}\left[A\middle|E\right]=\left[A^{-1}A\vdots A^{-1}E\right]=\left[E\vdots A^{-1}\right],$$

то $A^{-1}=B$. Таким образом, матрица, составленная из элементов b_{ij}, будет искомой обратной матрицей $A^{-1}=B$.

§ 5. Ранг матрицы

Мы уже упоминали, что прямоугольные $A_{m\times n}$ матрицы можно рассматривать как систему, состоящую из *m* штук *n*-мерных векторов-строк (или как систему из *n* штук *m*-мерных векторов). Поэтому естественным является рангом матрицы назвать ранг полученных систем векторов. Однако, мы имеем две различные системы векторов. Как быть? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема. *Для матрицы* $A_{m\times n}$ *максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.*
Поэтому корректно следующее определение.

Определение. *Рангом матрицы A назовем максимальное число ее линейно независимых векторов-строк (или столбцов).*

Ранг матрицы обозначается как *rank A* или *r* (*A*).

Справедливо неравенство $rank\ A\le\min\{m,\ n\}$.

Как находить *rank A*? В основу вычисления ранга матрицы (соответственно и ранга системы векторов (см. Часть 1)!) могут быть положены следующие свойства.

Свойства ранга матрицы.

1. *При транспонировании матрицы ранг не меняется.*
2. *Если из матрицы вычеркнуть нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.*
3. *Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.*

Оказывается, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к так называемой **канонической форме матрицы**, т.е. к матрице вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. матрица, у которой в начале диагонали, исходящей из левого верхнего угла, стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Тогда ранг матрицы равен количеству единиц на диагонали.

Существуют другие (эквивалентные предыдущему) определения ранга матрицы. Прежде введем новые понятия.

Определение. *Рассмотрим матрицу* $A_{m\times n}$. *Возьмем любое натуральное число k. Выделим в ней k строк и k столбцов, где* $k \le \min\{m,\ n\}$. *Из элементов, стоящих на пересечении выделения строк и столбцов, составим матрицу порядка k. Определитель полученной матрицы называется* ***минором k-го порядка*** *(ранее был введен минор элемента матрицы).*

Очевидно, таких миноров *k*-го порядка может оказаться несколько.

Определение. *Рангом матрицы A называется наибольший из порядков миноров матрицы A, отличных от нуля.*

Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min\{m,\ n\}$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Один из способов нахождения ранга матрицы, основанный на данном определении — «метод окаймляющих миноров».

Пример. Найти $r(A)$, где $A_{5\times 7} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Здесь ранг матрицы равен двум $r(A) = 2$, так как легко видеть, что есть ненулевые миноры второго порядка, а все миноры 3-го порядка равны 0.

Глава III. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- Линейное уравнение. Основные понятия
- Системы линейных уравнений
- Теорема Кронекера-Капелли
- Метод обратной матрицы. Метод Крамера
- Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
- Однородные системы уравнений
- Собственные векторы и собственные числа

§ 1. Линейное уравнение. Основные понятия

Определение. *Линейным уравнением относительно неизвестных действительных чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение вида*

$$a_1x_1 + \mathrm{a}_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ *– заданные числа. При этом* $a_1, \ldots, a_n$ – называются коэффициентами уравнения, b – свободный член.

Определение. *Совокупность n штук упорядоченных чисел* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *называется* ***решением*** *уравнения (1), если после их подстановки* $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ *в данное уравнение оно превратится в верное числовое равенство.*

Пример. Для уравнения $2x_2 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$ набор чисел (2, 1, 1, 2) является его одним из решений, а набор (3, 0, 0, 1) ─ нет.

Подчеркнем, что совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ составляет <u>одно</u> решение уравнения (1) (а не *n* решений!), и поэтому решение уравнения будем записывать в скобках $(c_1, \ldots, c_n)$ как единое целое .

Очевидно, что уравнение (1) имеет, вообще говоря, много решений.

Два решения уравнения (1) $c = (c_1, \ldots, c_n)$ и $l = (l_1, \ldots, l_n)$ будем считать одинаковыми тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства $\Leftrightarrow c_1 = l_1, \ldots, c_n = l_n$. В противном случае решения считаются разными.

Два линейных уравнения называются **равносильными**, если множества их решения как множества совпадают.

Решить уравнение (1) означает найти <u>все</u> его решения, или установить, что их нет.

В зависимости от того, каковы заданные числа $a_1, \ldots, a_n, b$ можно определить, имеет ли уравнение (1) решение или нет, а также их количество.

Возможно только следующие три случая:

1) Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, $b \neq 0$, т.е. если уравнение имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, $b \neq 0$, то очевидно, что оно не имеет решений, ибо какое бы $c = (c_1, \ldots, c_n)$ не подставили, то получим выражение вида $0 = b \neq 0$, что невозможно;

2) Если $a_i = 0$, $b = 0$, т.е. если уравнение имеет вид $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, то любая последовательно чисел $c = (c_1, \ldots, c_n)$ является решением. Такое уравнение называют **тривиальным**;

3) Если хотя бы одно из чисел a_i не равно 0 (пусть для определенности $a_1 \neq 0$), то тогда разделив все выражение на a_1, имеем $\Rightarrow x_1 = c_0 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$,

где $c_0 = b/a_1$, $c_i = \dfrac{-a_i}{b_1}$.

Таким образом, уравнение в этом случае имеет бесчисленное множество решений, так как значения для неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ можно выбирать бесконечным числом различных способов.

Итак, при *n* > 1 уравнение (1): либо 1) не имеет решения; либо 2) имеет бесчисленное множество решений.

§ 2. Системы линейных уравнений

Пусть теперь дана система, состоящая из m штук линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Уравнения системы будем считать пронумерованными – первой, второе и т.д. Так что коэффициенты при неизвестных в *i*-ом уравнении системы будем обозначать через $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ (первый индекс указывает номер уравнения, второй – номер неизвестно, при котором стоит этот коэффициент), свободный член – b_i.

Тогда система линейных уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Числа a_{ij} – коэффициенты системы; b_j – свободные члены.

Заметим, что в системе уравнений (1) количество неизвестных n может не совпадать с числом уравнений m.

Определение. *Решением системы уравнений (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел* $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$*, которая является решением каждого уравнения системы, т.е. при подстановке значений неизвестных* $x_1 = c_1,\ \ldots,\ x_n = c_n$ *в (1) все уравнения системы обращаются в верные равенства.*

Система уравнений, которая имеет хотя бы одно, решение называют **совместной**, в противном случае — несовместной. При этом каждое ее отдельное решение называют **частным решением**. Совокупность же всех частных решений называют **общим решением**.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, то требуется найти все ее решения, т.е. найти ее общее решение.

В дальнейшем увидим, что возможны только следующие три случая:
1) система уравнений несовместна, т.е. система не имеет ни одного решения;
2) система уравнений является определенной, т.е. имеет единственное решение;
3) система уравнений является неопределенной, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Две системы уравнений вида (1) называются **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарными преобразованиями *системы называются следующие:*

1) удаление (вычеркивание) из системы нулевой строки $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ *(так как оно «лишнее» и никак не влияет на множество решений);*

2) перестановка местами уравнений системы;

3) умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от 0 число;

4) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения этой системы, умноженного на любое число.

Оказывается, что *если к исходной системе применить так называемые* ***элементарные преобразования системы****, то полученная в итоге система эквивалентна исходной.*

Определение. *Система линейных уравнений (1) называется* ***однородной****, если все свободные члены равны 0;* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Заметим, что однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = 0,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n = 0$ является решение системы. Это решение называют **нулевым** или **тривиальным**.

§ 3. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными вида (1).

Представим систему (1) в матричной форме. Для этого:

1) сформируем из коэффициентов системы матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

2) матрицу-столбец (или n – вектор-столбец) неизвестных $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

3) m – вектор-столбец свободных членов $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

С учетом введенных обозначений и правил умножения матриц (здесь матрицы согласованы) систему линейных уравнений (1) можно переписать в краткой матричной форме следующтм образом

$$Ax = b. \tag{2}$$

(Здесь равенство векторов означает покомпонентное равенство.)

Нетрудно проверить, что матричное уравнение (2) содержит все уравнения системы (1).

Процесс нахождения решений системы уравнений весьма трудоемкий. Часто однако бывает достаточно знать, лишь что система совместна или несовместна, а сами собственно численные значения решения сами по себе не важны. Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы дает теореме Кронекера-Капелли. Для ее формулировки введем еще так называемую расширенную матрицу системы

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема (Кронекера-Капелли) (критерий совместности системы). *Система линейных алгебраических уравнений (1) совместна тогда и только тогда когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_b \qquad \left(r(A) = r\left(A_b\right)\right).$$

Справедливо также следующее утверждение, которое уточняет теорему Кронекера-Капелли.

Теорема. *Если выполняется условие теоремы Кронекера-Капелли* $rangA = rangA_b = r$ *(т.е. другими словами, если система совместна), то:*

1) *при r = n (т..е если ранг системы равен числу неизвестных), система имеет единственное решение;*

2) *при* $r < n$ *система имеет бесчисленное множество решений.*

Замечание. Дадим геометрическую иллюстрацию теоремы Кронекера-Капелли. Для этого введем m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов системы и его свободных членов:

$$\overrightarrow{a_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, i = 1,2,...,n, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система уравнений (1) может быть записана в векторной форме как

$$x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + x_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$$

Это равенство можно рассматривать как разложение вектора b по системе векторов $a_1,....,a_n$. Нетрудно видеть, что решить систему означает найти коэффициенты разложения $x_1,....,x_n$ в данной линейной комбинации. Теорема Кронекера-Капелли по сути дает условия, при которых такое разложении возможно, а именно, когда количество линейно независимых векторов у двух систем векторов $a_1,....,a_n$ и $a_1,....,a_n,b$ одинаково. В этом случае вектор b всегда может быть разложен по системе $a_1,....,a_n$. При этом, если система векторов $a_1,....,a_n$ имеет максимальный ранг, то такое разложение вектора b будет единственным. Если же ранг не является максимальным, то в системе $a_1,....,a_n$ может быть много линейно независимых подсистем векторов, а значит много вариантов разложения вектора b и, следовательно, много решений для исходной системы уравнений.

Также можно трактовать СЛАУ следующим образом. Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1,....,a_n$ образует конечномерное линейное пространство, размерность которого равна рангу этой системы векторов. Если вектор b лежит (принадлежит) в этом пространстве, то он может быть разложен по базисным векторам этого пространства, что означает совместность исходной системы уравнений.

Из этих теорем вытекает следующее общее правило практического нахождения решения произвольной системы линейных уравнений:

1) Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r\left(A_b\right)$, то система несовместна, и следовательно процесс решения завершен.

2) Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_b = r$ (обозначили общее значение ранга как *r*), то система совместна. Надо найти какой-либо базисный минор порядка *r* (напомним: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять *r* штук уравнений (каких?) из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Далее *r* штук неизвестных, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют **главными** и оставляют их слева, а остальные (*n* – *r*) неизвестных называют **свободными** и переносят их в правые части уравнений.

3) Найти выражения главных неизвестных через свободные. Полученное выражение является общим решением системы.

4) Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных, находя тем самым частные решения системы.

Пример 1. Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$.

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Легко видеть, что $r(A) = 1$, а ранг расширенной матрицы есть $r(A_b) = 2$, так как $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, а $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Таким образом $\Rightarrow r(A) \neq r\left(A_b\right) \Rightarrow$. Это означает, что система уравнений несовместна.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

Решение. Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Все остальные миноры 3-го порядка матрицы A равны 0. Легко видеть, что в расширенной матрице A_b все миноры 3-его порядка, включая и минор , составленный с помощью свободных членов равны нулю:

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (так как столбцы 1 и 2 пропорциональны).

Значит, $r(A) = r\left(A_b\right) = 2$.

Далее, согласно общим рекомендациям, берем два первых уравнения (они входят в базисный минор), выделяем в них главные и свободные переменны, и в итоге находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 1 \end{cases}$ – общее решение системы.

§ 4. Метод обратной матрицы. Метод Крамера

Рассмотрим частный случай системы (1), когда $m = n$ (число уравнений m совпадает с числом неизвестных n). Поскольку матрица A системы

$$Ax = B$$

квадратная, то если $\Delta = \det A \neq 0$ (т.е, A – невырожденная), то умножая (2) на A^{-1} слева, имеем, что матричное уравнение (2) имеет единственное решение

$$x = A^{-1}b \tag{3}$$

Отыскание решения по формуле (3) называют **матричным способом** или **методом обратной матрицы решения** системы линейных уравнений.

Матричное равенство (3) перепишем в более подробной записи, используя формулы для нахождения обратной матрицы. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left(A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_2 + \ldots + A_{n1}\cdot b_n\right) \\ \frac{1}{\Delta}\left(A_{12}\cdot b_1 + A_{22}\cdot b_2 + \ldots + A_{n2}\cdot b_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\Delta}\left(A_{1n}\cdot b_1 + A_{2n}\cdot b_2 + \ldots + A_{nn}\cdot b_n\right) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая покомпонентно полученные векторы, имеем

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(A_{11}b_1 + \ldots + A_{n1}b_n\right), \ldots, x_n = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1n}b_1 + \ldots + A_{nn}b_n\right).$$

Преобразуем полученные формулы. Для этого рассмотрим, например, определитель Δ_1, полученный из определителя Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов, т.е. рассмотрим определитель вида :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу: $b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_{nA_{n1}}$. Аналогично можно выписать и соответственно разложить определители $\Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$. Тогда предыдущие формулы можно переписать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

где Δ_i есть определитель матрицы, полученной из исходной заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Это формулы Крамера решения систем *n* уравнений с *n* неизвестными.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$.

Имеем согласно формул Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14, \quad x_1 = \frac{7}{7} = 1, \quad x_2 = \frac{14}{7} = 2.$$

§ 5. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прежде отметим, что, как метод обратной матрицы, так и метод Крамера применимы только для случая $n = m$. Оба эти методы являются весьма трудоемкими по количеству вычислительных операций и требуют порядка $n^2 \cdot n!$

арифметических действий для нахождения решения системы линейных уравнений. Например, при $n = 5$ это составит около 3 000 действий, при $n = 10$ – около $3{,}6 \cdot 10^8$ действий. Серьезные практические задачи имеют $n = 100$ и более. Даже суперкомпьютеры требуют долгое время для вычисления. Кроме того, неизбежные погрешности при компьютерном округлении действительных чисел $\left(\frac{1}{3} = 0{,}3(3)\ldots\right)$ часто ведут к значительным ошибкам.

Существуют более экономичные методы решения. В частности, одним из них является метод Гаусса или, как иначе говорят, метод последовательного исключения неизвестных. Фактически метод основан на предварительном преобразовании расширенной матрицы системы к специальному ее виду (так называемому, трапецевидному, вообще говоря, виду). Эти преобразования матрицы (или, другими словами, преобразование системы уравнений) называют еще жордановыми преобразованиями.

Что это такое? Жордановы преобразования состоят из элементарных преобразований, выполняемых в определенном порядке. Напомним, элементарными преобразованиями системы называются:

1) перемена местами любых двух уравнений системы;

2) умножение (деление) обеих частей какого-либо уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;

3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на произвольное число λ ($\lambda = 0$ нет смысл рассматривать, так как это ничего не изменяет);

4) удаление из системы нулевого уравнения, т.е. уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Следовательно, раз жордановы преобразования основаны на элементарных преобразованиях, то такие преобразования, как мы упоминали уже ранее, приводят к системе уравнений эквивалентной исходной.

Схема метода.

Пусть дана система линейных уравнений :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (называют его еще как прямой ход метода) система с помощью жордановых преобразований сводится к ступенчатому (трапецевидному) виду (частности, это может быть и треугольный вид):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{kk}x_k + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k, \end{cases} \tag{2}$$

где $k \le n$, $a'_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из ступенчатой системы (2).

Опишем подробнее метод Гаусса.

Прямой ход. Будем считать, что уже в исходной системе (1) коэффициент $a_{11} \ne 0$. (Если $a_{11} = 0$, то среди оставшихся уравнений найдем r-ое уравнение такое, что $a_{r1} \ne 0$. Такое всегда найдется, ибо в противном случае когда все коэффициенты $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$ переменная x_1 фактически исключается вообще из рассмотрения.

Теперь, используя элементарные преобразования, преобразуем систему (1), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $\left(-a_{21}/a_{11}\right)$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $\left(-a_{31}/a_{11}\right)$ и сложим почленно с третьим и т.д. Продолжая процесс, пока не дойдем до последней строки. Этим завершается первый шаг гауссового исключения. В результате получим систему, в которой, начиная со второго уравнения, отсутствуют слагаемые, содержащие неизвестное x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \left[\begin{array}{c} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a'^{(1)}_{2n}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array} \right]. \end{cases} \tag{$1^{(1)}$}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ − новые значения коэффициентов, которые получились после первого шага $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{1j} \cdot a_{i1}}{a_{11}}$, $b_i^{(1)} = b_i - \dfrac{b_1 \cdot a_{i1}}{a_{11}}, i = 2,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$

Замечание. 1) Выбранный коэффициент $a_{11} \ne 0$ называют **разрешающим элементом** (на первом шаге), а строка и столбец (первые в данном случае), содержащие разрешающий элемент называют **разрешающей строкой и столбцом** соответственно.

2) На практике, для удобства, вычисления коэффициентов преобразованной системы можно пользоваться «правилом прямоугольника»: строят прямо-

угольник с «вершинами» a_{11}, a_{ij}, a_{i1}, a_{1j} и новый элемент вычислят как разность произведений диагональных элементов :

$$a'_{ij} = a_{ij} \cdot a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j}.$$

Диагональ, на которой лежат разрешающий элемент a_{11} и преобразуемый элемент a_{ij} – называется главной, другая диагональ – побочная.

Заметим, что коэффициенты, полученные по правилу прямоугольника, отличаются от коэффициентов из $\left(1^{(1)}\right)$ на множитель a_{11}. Другими словами, если в $\left(1^{(1)}\right)$ каждое уравнение умножить на число $\lambda = a_{11}$ (это же есть элементарное преобразование, не изменяющее множества решений !), то тогда упомянутые коэффициенты совпадут. Этот факт легко следует из формул (*).

Вернемся, однако, к системе $\left(1^{(1)}\right)$. В рамке выделена остаточная часть системы, которую будем решать аналогичным образом.

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & \vdots & a'_n \end{pmatrix}$$

Считая разрешающим элементом $a'_{22} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. (Для пересчета опять можно пользоваться правилом «прямоугольника» − только уже для остаточной части).

Продолжаем этот процесс, пока это возможно. При этом, если встретится нулевая строка $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, то ее вычеркивают (удаляют).

В итоге процесс таких преобразований приводит к одному из двух случаев:

1) либо встретится уравнение вида $0 \cdot x_k + \ldots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, и тогда это означает, что рассматриваемая система несовместна;

2) либо получим систему ступенчатого вида без остаточной части

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n = c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad {}_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = c_r \end{cases} \tag{2}$$

Если $r = n$, то говорят, что система (2) имеет треугольный вид, в противном случае ─ трапецевидный . Возможное уменьшение количества уравнений связано с вычеркиванием нулевых уравнений . На этом прямой ход закончен.

Обратный ход заключается в решении ступенчатой системы (2).

а) Если $r = n$, то последнее уравнение системы (2) имеет вид

$$b_{nn}x_n = c_n,\ \left(b_{nn} \neq 0\right),\ \text{откуда}\ x_n = c_n / b_{nn}.$$

Тогда, подставив найденное x_n в предпоследнее уравнение, найдем оттуда x_{n-1}. Двигаясь, таким образом, снизу вверх по уравнению системы (2), найдем все неизвестные $x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_1$.

б) Если $r < n$, то в последнем уравнении системы (2) переменные $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ объявляем свободными (можно другие, оставив любое одно из перечисленных переменных) и перенося их в первую часть, находим оставшееся неизвестное x_r через свободные:

$$x_r = c'_r + b'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + b'_{rn}x_n.$$

Подставляя найденное x_r в предпоследнее уравнение, найдем x_{r-1}, которое после приведения подобных членов будет выражаться только через свободные переменные $\left(x_{r+1},\ \ldots,\ x_n\right)$.

Таким образом, поднимаясь снизу вверх по системе (2), мы находим в итоге все оставшиеся неизвестные $x_{r-2},\ \ldots,\ x_1$, каждое из которых будет выражаться только через свободные переменные $\left(x_{r+1},\ \ldots,\ x_n\right)$.

Придавая свободным неизвестным $\left(x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n\right)$ произвольные значения, получим тем самым бесчисленное множество решений системы (1).

Замечание. На практике, преобразование системы значительно удобнее выполнять, если оперировать с расширенной матрицей коэффициентов (или как говорят пользоваться табличной формой), которая после первого шага имеет вид

$$A_b^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & \vdots & a'_n \end{pmatrix}.$$

В этой таблице строки тоже называют уравнениями.

§ 6. Однородные системы уравнений

Система линейных уравнений (1) называется ***однородной****, если во всех уравнениях свободные члены равны 0, т.е. вектор* $\overline{b} = \overline{0}$.

Тогда однородная система в матричной форме имеет вид

$$Ax = 0 \tag{3}$$

где матрица $A = A_{m\times n}$ составлена из коэффициентов системы (1).

Очевидно, что верно равенство $r(A) = r(A_b)$. Значит, система (3) всегда совместна. Очевидно, $x = 0$ является решением (3) (тривиальное решение).

Когда существуют ненулевые решения?

Теорема. *Для того, чтобы однородная система m линейных уравнений с n неизвестными, имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы* $r(A) < n$.

Доказательство. Необходимость. Так как ранг матрицы не может быть больше размеров матрицы то $r \le n$. (Ясно, что $r \le m$ тоже – но это нам не надо!). Предположим вначале, что $r = n$. Тогда по тереме Кронекера-Капелли система линейных уравнений имеет единственное решение, а именно нулевое решение. Значит, других, кроме тривиальных решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то должно выполняться неравенство $r < n$, что и требовалось доказать.

Достаточность.

Если есть система уравнений размера $n \times n$, и $r < n$, то это означает, что столбцы матрицы коэффициентов линейно зависимы. Это означает, что в их линейной комбинации

$$x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + x_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

существует ненулевой набор чисел $x_1,...,x_n$, что и требовалось доказать.

Имеет место следующее утверждение

Теорема. *Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными, имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю* $\Delta = \det A = 0$.

Следствие. *Однородная система, у которой число уравнений меньше числа неизвестных всегда имеет ненулевое решение.*

§ 7. Собственные векторы и собственные числа

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n, элементы которой действительные числа. При умножении такой матрицы на n-мерный вектор $\overline{x} \in R^n$, получается некоторый n-мерный вектор $\overline{b} = A\overline{x}$, $\overline{b} \in R^n$.

Во многих задачах линейной алгебры возникает следующий вопрос: можно ли найти такое число λ, что верно равенство $\overline{b} = \lambda\overline{x}$, т.е.

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}.$$

По-другому, для конкретной матрицы A требуется знать, есть ли такие специфические векторы $\overline{x}$, что действие на них матрицы A равносильно просто умножению этого вектора на некоторое число λ .

Определение. *Число* $\lambda \in R$ *называется собственным числом квадратной матрицы A, если существует такой ненулевой вектор* $\overline{x} \in R^n$ *, что выполняется равенство*

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}. \qquad (1)$$

При этом вектор $\overline{x}$ *называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу* λ *.*

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \overline{0}_n, \qquad (2)$$

где E – единичная матрица, $\overline{0}_n$ – нулевой вектор. Система уравнений (2) – однородная. Следовательно, она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$. Этот определитель представляет собой многочлен n-ой степени (относительно переменной λ) и он называется **характеристическим многочленом**, а уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ характеристическим уравнением для матрицы A.

Его действительные корни (если они существуют) называются **собственными** числами матрицы A.

Замечание. Оказывается, собственные векторы образуют базис пространства, в котором весьма просто представляются многие объекты и позволяют найти решение других задач.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (3-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$.

для $\lambda_1 = 2$ собственный вектор есть решение системы уравнений

$(A - \lambda E)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Пусть $x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = -2\alpha \Rightarrow$ Общее решение есть $(-2\lambda, \lambda)$, где $\alpha \in R -$любое, $\alpha \neq 0$. Или, вынося общий множитель, имеем $(-2\lambda, \lambda)$=$(-2\lambda, \lambda) = \lambda(-2,1)$. Отсюда, учитывая, что умножение на число λ для вектора $(-2,1)$ означает изменение лишь его длины, то в качестве собственного вектор, соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 2$ можно взять вектор $(-2,1)$. Аналогично находится второй собственный вектор для $\lambda_1 = 5$ (Упр).

Глава 4. Применение элементов линейной алгебры в экономике

- Использование алгебры матриц
- Использование систем линейных уравнений

§1. Использование алгебры матриц

Использование элементов алгебры матриц упрощает и облегчает решение многих экономических задач. Особенно актуальным становится этот вопрос при компьютерной разработке и использовании различных баз данных, в которых почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Рассмотрим простейшие производственные задачи, в которых можно использовать понятие матрицы и операций над ними.

Пример. Рассмотрим 4 фирмы, выпускающие 5 видов продукции и потребляющие при этом 3 типа сырья. Данные о дневной производительности этих фирм по каждому виду изделий, нормах потребления каждого типа сырья по каждому виду изделий, продолжительность работы (в днях) каждой фирмы в году, а также цены каждого типа сырья приведены в таблице:

Вид изделия	Тип сырья			Фирма			
	1	2	3	1	2	3	4
1	3	4	2	5	6	7	0
2	4	3	6	0	4	6	3
3	5	7	9	6	5	0	7
4	2	4	4	6	7	0	4
5	3	5	3	3	2	4	0
Продолжительность работы фирмы				200	150	100	200
Цена единицы сырья	30	20	10				

Матрица дневных затрат сырья фирмами на единицу изделия (изделия одинаковы для всех фирм , что естественно для поставщиков!)

Матрица ежедневной производительности по каждому виду изделий

Требуется определить:

1) годовую производительность каждой фирмы по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждой фирмы по каждому типу сырья;
3) годовую сумму кредитов для закупки сырья, необходимую для выпуска продукции указанных видов и объемов.

Решение. Составим следующие матрицы:

1) $Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{матрица ежедн. производительность фирм} \\ \text{каждыйстолбец} = \text{дневная производит.} \\ \text{отдельной фирмы по каждому виду} \\ \text{изделий} \end{pmatrix}$,

2) $S = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{ежедн. затраты сырья на единицу} \\ \text{изделия (они одинаковы для всех} \\ \text{фирм} \end{pmatrix}$.

Так что S_{ij} описывает расход i-го типа сырья на производство j-го вида изделия.

3) Вектор-строку (матрица размера 1×3) $p = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \end{pmatrix}$ -- стоимость единицы сырья

4) диагональную <u>матрицу</u> (так нам удобнее!) времени работы фирмы

$$T = \begin{pmatrix} 200 & & & 0 \\ & 150 & & \\ & & 100 & \\ 0 & & & 200 \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем решение задачи, используя введенные матрицы:

1) Годовая производительность j-ой фирмы по каждому виду продукции получается умножением j-го столбца матрицы Q на количество рабочих дней для этой фирмы. Таким образом, годовая производительность каждой фирмы по каждому изделию описывается матрицей

$$G = QT = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & 900 & 700 & 0 \\ 0 & 600 & 600 & 600 \\ 1200 & 750 & 0 & 1400 \\ 1200 & 1050 & 0 & 400 \\ 600 & 300 & 400 & 0 \end{pmatrix},$$

Здесь j-ый столбец в полученной матрице G есть годовая производительность j-ой фирмы.

2) Дневной расход по типам сырья на фирмах описывается матрицей, полученной умножением двух матриц SQ

$$SQ = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 79 & 57 & 55 \\ 101 & 109 & 66 & 74 \\ 97 & 115 & 62 & 97 \end{pmatrix}.$$

Здесь i-ая строка полученной матрицы SQ соответствует расходу i –го типа сырья по фирмам, j-ый столбец – расход сырья j- ой фирмой.

3) Годовая потребность каждой фирмы по каждому сырью получается путем умножения дневной потребности (т. е. матрицы SQ) на соответствующее количество рабочих дней каждой фирмы в году (т. е. умножением на матрицу T):

$$SQT = \begin{pmatrix} 13\,200 & 11\,850 & 5\,700 & 11\,000 \\ 20\,200 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 19\,400 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

4) Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждой фирмы получается умножением вектора цен (p) на годовую потребность (SQT):

$$pSQT = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 994\,000 & 855\,000 & 365\,000 & 82\,000 \end{pmatrix}.$$

Элементы в полученной строке означают величину кредита для каждой фирмы, необходимого для закупок сырья, требуемого в производстве данных изделий.

§ 2. Использование систем линейных уравнений

Существует множество экономических задач, приводящих к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений.

Мы рассмотрим такую задачу на примере макроэкономической модели многоотраслевого хозяйства. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой – потребителем продукции выпускаемой другими отраслями. Возникает задача расчета связей между отраслями и баланса выпускаемой и потребляемой продукции. Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в трудах американского экономиста Василия Леонтьева (русского эмигранта 1913 г., лауреата Нобелевской премии, осуществлял анализ причин экономической депрессии в США в 1929 – 1932 г.г.). Межотраслевые модели используются во многих странах мира (более 80), и позволяют организовать рациональное управление производственными секторами национальных экономик.

Для простоты предположим, что изучаемое хозяйство (макроуровень) представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Мы предполагаем, что в одну отрасль объединены все производства одного продукта. Интуитивно ясно, что чем мельче «нарезка» производственного сектора национальной экономики на «отрасли», т.е. чем больше n, тем адекватнее можно описать существующие взаимосвязи. Но здесь имеется эффект «проклятие бесконечности», связанной с размерностью получаемых задач. В 1972 г. в СССР, n = 112. Сейчас в Японии n = 2000. Чаще всего, используют n = 500 - 600. Процесс производства обычно изучается за некоторый период (год, например). Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление) (например, тракторному заводу нужны моторы из моторного завода).

Составим математическую задачу деятельности многоотраслевого хозяйства, для чего введем следующие обозначения:

1) x_i – общий объем продукции i-ой отрасли (валовой выпуск); $i=\overline{1,n}$, $x_i \ge 0$ – по смыслу;
2) x_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью в процессе производства продукции x_i, $j=\overline{1,n}$. По смыслу $x_{ij} \ge 0$;
3) y_i – объем продукции i-ой отрасли, предназначенной для реализации в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления, личное потребление граждан, общественное потребление, гос. органы, …), $y_i \ge 0$. $i=\overline{1,n}$.

Принцип баланса во взаимосвязях различных отраслей данного хозяйства состоит в том, что валовой выпуск i-ой отрасли должен равняться сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{1}$$

Уравнение (1) называют **соотношениями баланса**.

Замечание. Поскольку продукция разных отраслей имеют разные измерения (метры, тонны, штуки, …), то в дальнейшем будем иметь в виду **стоимостный баланс** (в единых единицах измерения, например, млн. рублей).

Было установлено (первым, видимо, Леонтьевым В.В.) важное свойство: в течение длительного периода величины $a_{ij} = x_{ij} / x_j$; $i, j = \overline{1,n}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это можно объяснить, например, тем, что технология производства остается на одном и том же уровне длительное время. Следовательно, объем потребления *j*-ой отраслью продукции *i*-ой отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа. В силу этого факта можно сделать следующее допущение: для производства *j*-ой отрасли продукции объема x_j нужно использовать продукцию *i*-ой отрасли в объеме $a_{ij} \cdot x_i$, где $a_{ij} - \text{const}$:

$$x_j = a_{ij} \cdot x_i .$$

При таком допущении технология производства принимается линейной (гипотеза линейности). При этом числа a_{ij} называются **коэффициентами прямых затрат** или **технологическими коэффициентами**. Тогда уравнения баланса (1) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \qquad x_i \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n + y_n, \qquad y_i \geq 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Введем в рассмотрение векторно-матричные обозначения:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор валового выпуска; $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – вектор конечного потребления;

$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ i, j = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица).

Тогда (2) в матрично-векторной записи есть

$$x = Ax + y, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0 . \tag{3}$$

Обычно уравнение (3) называют **уравнением линейного межотраслевого баланса**, а описанную выше модель называют **моделью Леонтьева**.

Модель межотраслевого баланса можно использовать для различных целей, среди которых можно выделить две основные:

1) В первом, более простом случае, пусть известен вектор валового выпуска *x* и известна технологическая матрица *A*. Требуется рассчитать вектор конечного потребления *y*. Это решается просто $y = x - Ax$.

2) Во втором случае используется для решения следующие задачи: Для периода времени (например, на 1 год) T задан вектор конечного потребления y. Требуется определить вектор x валового выпуска (при условии, что задана технологическая матрица A).

   В этом случае надо решить систему уравнений

$$x - Ax = y \quad \text{или} \quad (E - A)x = y, \tag{4}$$

   где y – задано, x – неизвестно.

Отметим, что система (4) имеет ряд особенностей, связанных с экономическим характером ее элементов: все элементы $a_{ij} \geq 0$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$. Эти особенности усложняют задачу. Вообще говоря, не для всякого заданного наперед $y \geq 0$ найдется решение системы (4), что $x \geq 0$.

В связи с этим дадим следующее определение

Определение. Матрица A, все элементы которой ≥ 0 называется **продуктивной**, если для любого вектора $y \geq 0$ существует решение x уравнения (4), причем $x \geq 0$.

Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, то уравнение (4) имеет единственное решение $x = (E - A)^{-1} y$.

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется **матрицей полных затрат**.

Вопрос: Когда A – продуктивна? Например, когда сумма элементов по каждому столбцу (строке) ≤ 1.

Часть II. Аналитическая геометрия.

Аналитическая геометрия представляет собой раздел геометрии, в которой геометрические объекты (фигуры) исследуются методами алгебры на основе метода координат. Основными понятиями (аналитической) геометрии являются понятие геометрической фигуры или просто фигуры, и понятие системы координат.

Глава V. Аналитическая геометрия на плоскости.

- Системы координат на плоскости
- Связь полярной и прямоугольной систем координат
- Расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$
- Деление отрезка в данном отношении
- Площадь треугольника
- Линии на плоскости. Основные понятия

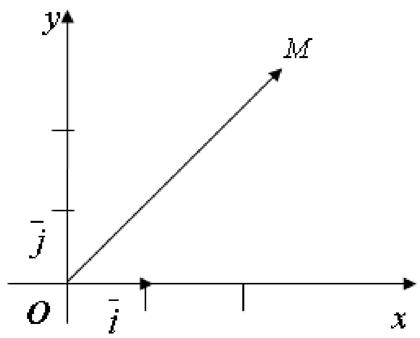
§ 1. Системы координат на плоскости

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат.

Прямоугольная система задается двумя взаимно-перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых: 1) выбрано положительное направление и 2) задан (единичный) (масштабный) отрезок. Обычно, единицу масштаба берут одинаковой для обеих осей.

Оси называют **осями координат**, точку их пересечения O – **началом координат**. Одну из осей называют осью **абсцисс** (осью Ox), другую – осью ординат (осью Oy) (см. рис.).



На рисунках обычно ось абсцисс располагают горизонтально, и направленной слева направо, ось ординат – вертикально и снизу вверх. Оси координат делят плоскость на 4 области – четверти (или квадранты).

Единичные векторы осей часто обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ $\left(|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1,\ \bar{i} \perp \bar{j},\ (i, j) = 0\right)$. Систему координат обозначают Oxy (**Oij**), а плоскость, которую образуют (в которой расположены!) оси координат, называют **координатной плоскостью**.

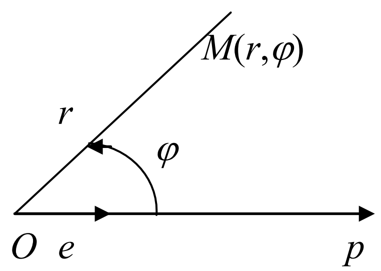
Как описать положение точки на плоскости?

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Оxy. Вектор OM называют **радиус-вектором** точки M. Пользуясь выбранными осями координат, поставим этой точке M (и радиус-вектору OM также) в соответствие два числа x и y – **координаты** точки M в заданной системе координат. Как? Для этого из точки M опустим перпендикуляры на оси координат (спроецируем). Длины отрезков проекции обозначим x и y , соответственно. При этом берем знак « + » или « – » в зависимости от положения относительно начала координат O.

Таким образом, два числа (x, y) однозначно определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка и наоборот. При этом считаем, радиус-ветор OM имеет те же координаты $OM=(x, y)$.

Как задать вектор $\overline{AB}$ с началом в точке $A\left(x_1; y_1\right)$ и концом $B\left(x_2; y_2\right)$? Как разность радиус-векторов точек А и В. Тогда имеем $\Rightarrow \overline{AB}\left(x_2-x_1; \mathrm{y}_2-y_1\right)$.

<u>Другой</u> практически важной системой координат является <u>**полярная**</u> система координат. Полярная система координат задается точкой 0, называемой **полюсом**, лучом 0p, называемым **полярной осью** и единичным масштабным вектором $\bar{e}$ на полярной оси Оp.



Возьмем на плоскости точку $M \neq O$. Положение точки M определяется парой чисел: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет – против часовой стрелки). Числа (r, φ) – полярные координаты (r – <u>полярный радиус</u>, φ – <u>полярный угол</u>.)

При этом для изучения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $-\pi<\varphi \leq \pi$ (или $0 \leq \varphi<2\pi$), а полярный радиус – $[0,+\infty)$. В этом случае каждой точке (кроме 0!) соответствует единственная пара чисел (r, φ), и наоборот.

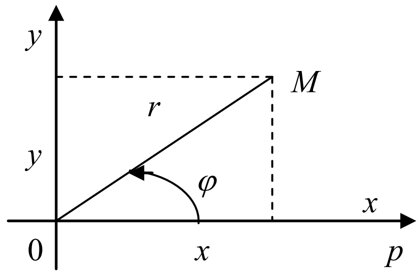
Связь полярной и прямоугольной систем координат

Для установления связи между указанными системами координат, совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось Op с положительным направлением оси Ox.

Пусть точка M имеет координаты (x, y) и (r, φ) в системе Oxy и полярной системе, соответственно.

Из рисунка видно, что декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$



Полярные через декартовы $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

При этом, определяя угол φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $\pi < \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$).

§ 2. Простейшие приложения метода координат на плоскости

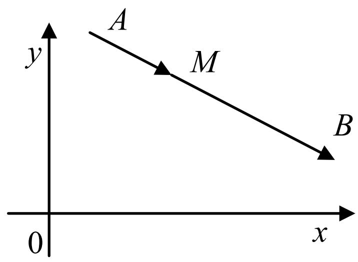
1. Расстояние *d* между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Искомое расстояние равно длине вектора $\overline{AB}\,(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$. Координаты вектора получаются путем вычитания координат точки *A* (начала вектора) из координат точки *B* – конца вектора.

Тогда $$d = \sqrt{\left(\overline{AB}\,,\overline{AB}\right)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Деление отрезка в данном отношении.

Требуется разделить отрезок *AB*, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. надо найти точку *M* (*x*, *y*) отрезка *AB* такую, что $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$.



Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Тогда факт, что *M* делит отрезов *AB* в отношении λ означает, что $\overline{AM} = \lambda\cdot\overline{MB}$ или в координатной записи:

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_2 - x) \\ \lambda(y_2 - y) \end{pmatrix}.$$

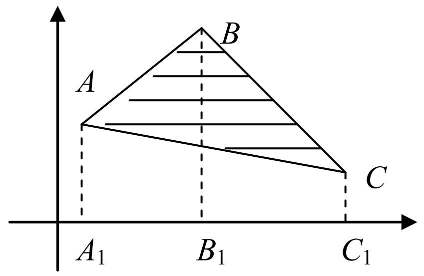
Отсюда, $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ или $\boxed{x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}$. Аналогично, $\boxed{y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$.

Это – формула деления отрезка в данном отношении λ.

В частности, при λ = 1 (т.е. разделить отрезок пополам), т.е когда *AM* = *MB,* имеем $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ – координаты середины отрезка *AB*.

Замечание. Если $\lambda = 0$, то точки A и M совпадают. Если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB – говорят, что точка M делит отрезок внешним образом ($\lambda \neq -1$, т.к. тогда бы выполнялось $\dfrac{AM}{MB} = -1$ или $AM + MB = 0$, т.е. $AB = 0$, что невозможно, если точки различны).

2. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.



$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{-A_1ACC_1} \Rightarrow \text{Упр.}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Если из данной формулы получилось отрицательное число, то следует взять по его абсолютной величине. Если же $S_{\Delta} = 0 \Rightarrow$ точки лежат на одной прямой (не существует треугольник).

§ 3. Линии на плоскости. Основные понятия

Еще одним из важных понятий аналитической геометрии является понятие фигуры (линии, кривой, …).

Часто линия задается как некоторое множество точек, объединенных специфическим, присущим только ему, свойством. Например, окружность радиуса R (на плоскости) – есть множество всех тех точек плоскости, которые удалены на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центр окружности).

Как уже отмечали ранее, введение на плоскости системы координат позволяет определять положение любой точки плоскости заданием двух чисел – ее координат. Положение же линии на плоскости можно определить с помощью уравнения (т.е. равенства, связывающего координаты точек этой линии). Поэтому одной из задач аналитической геометрии состоит в том, чтобы по заданным геометрическим свойствам линии составить ее уравнение в заданной системе координат.

Определение. Уравнением линии (или кривой) на плоскости $0xy$ называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей этой линии. Переменные x и y в уравнении называются **текущими координатами точек линии**.

Пример. Лежат ли точки K (–2; 1) и L (1; 1) на линии $2x + y + 3 = 0$? $\Rightarrow$ (подставляя координаты точек в уравнение) K – да, L – нет.

Уравнение линии удобно тем, что позволяет изучение геометрические свойства линии заменить исследованием его уравнения.

Аналогичным образом вводится понятие линии в полярной системе координат.

Именно уравнение $F(r,\varphi)=0$ называется уравнением линии, если координаты r и φ любой точки линии, и только они удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать также при помощи двух параметрических уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ где x и y – координаты ткущей точки M (x, y), лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая **параметром**. Конкретные значения параметра t определяют положение точки на плоскости. Например, если $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$ то значению $t = 2$ соответствует точка M (2; 4), т.к. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2^2 = 4. \end{cases}$

Если параметр t <u>меняется</u>, то точка M (x, y) на плоскости <u>перемещается</u>, тем самым «прочерчивая» (описывая) некоторую линию.

Пример. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2. \end{cases}$ Можно исключить «t» из уравнений (путем подстановки) $\Rightarrow$ $y = x^2$ или $y - x^2 = 0$ ($F(x,y)=0$). Эта линия – **парабола**.

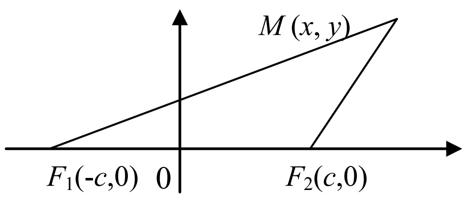
Пример. Эллипс.

Определение. (Геометрическое свойство, описывающее эту линию) *Линия, для всех точек которой сумма расстояний от двух заданных точек, называемых **фокусами**, если величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами, называется **эллипсом**.*

Как «рисовать»?

1) вспомним окружность: ее можно нарисовать с помощью 1 гвоздя и веревки;

2) эллипс $\Rightarrow$ 2 гвоздя и веревка



Составим уравнение эллипса. Для этого введем обозначения: 1) фокусы обозначим через F_1 и F_2; 2) расстояние между фокусами – $2c$; 3) сумму расстояний от произвольной (текущей) точки M эллипса до фокусов – через $2a$ (см. Рис.) («2» – для удобства). Ясно, что $2a > 2c$, т.е. $a > c$.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси $0x$, а начало координат O совпало со срединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Пусть M (x, y) – произвольная текущая точка эллипса. Тогда согласно геометрическому описанию эллипса должно быть $MF_1 + MF_2 = 2a$. Значит, отсюда следует (согласно формуле вычисления расстояний)

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ – это по сути уравнение эллипса.

Его можно «упростить» к виду (Упр.)

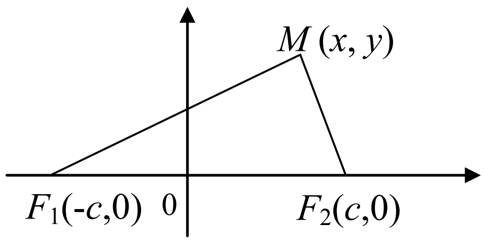
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1},$$ **каноническое уравнение эллипса**.

где ввели обозначение b как $a^2 - c^2 = b^2$

Упражнение. Изучить свойства эллипса: a, b – полуоси, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – мера вытянутости $\varepsilon = \frac{c}{a}$ –, директрисы $x = \pm\frac{\varepsilon}{a}$.

2. Гиперболой *называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Если ввести обозначения, аналогичные предыдущему, то аналитически описанное геометрически свойство означает, что



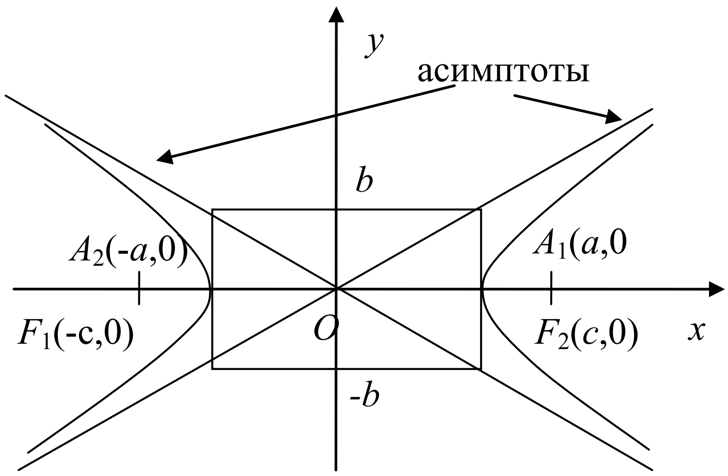
$\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$,

т.е. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$.

После упрощений (упр.) получаем каноническое уравнение гиперболы

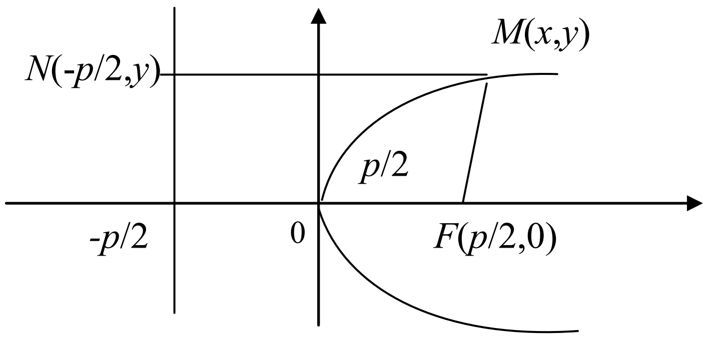
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$ где $b^2 = c^2 - a^2$ $(2a < 2c \Rightarrow c < a)$.

Упражнение. Изучить свойства гиперболы.



3. Параболой *называется множество всех точек плоскости, каждая из которых* *<u>одинаково удалена</u>* *от* *<u>данной точки</u>*, *называемой* ***фокусом***, *и данной прямой, называемой* ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через $p(p>0)$.

Для вывода уравнения выберем систему координат *Oxy* так, чтобы ось *Ox* проходила через фокус *F* перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к *F*, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой.



Тогда $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\dfrac{p}{2}$ или $x+\dfrac{p}{2}=0$.

Проведем $MN\perp$ директрисе. $\Rightarrow$ Согласно «описанию» параболы имеем

$MF=MN$ или $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$ $\Rightarrow$ (преобразуем, возводя в квадрат)

$\boxed{y^2=2px-}$ каноническое уравнение параболы.

Упражнение. Нарисовать линии

1) $\begin{cases} x=R\sin t \\ y=R\cos t \end{cases}$; 2) $r=a\cdot\cos 3\varphi$ $(a>0)$

Прямая на плоскости

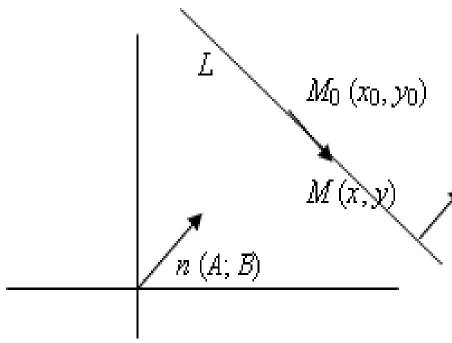
- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.
- Уравнение прямой L, проходящей через две заданные точки
- Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых
- Уравнение прямой в отрезках
- Нормальное уравнение прямой (нормированное уравнение прямой)
- Расстояние от точки до прямой

Прямую на плоскости относительно фиксированной системы координат можно задать:

1) двумя различными ее точками;
2) точкой и направлением (вектором) прямой;
3) точкой прямой и вектором, перпендикулярным прямой.

Рассмотрим различные варианты аналитического задания прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой



Пусть в прямоугольной системе координат Oxy заданы вектор $n(A; B)$ и точка $M_0(x_0; y_0)$.

Задача. Найти уравнение прямой L, проходящей через M_0 и которая перпендикулярна вектору n.

Пусть $M(x, y)$ − произвольная (текущая) точка искомой прямой L. Тогда при любом положении точки M вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ должен быть $\perp$ вектору n (A; B). Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{M_0M},\ \bar{n}\right) = 0 - \text{ это векторное уравнение прямой.} \qquad (1)$$

Запишем (1) в координатной форме, пользуясь определением скалярного произведения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (2)$$

или

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3)$$

где $C = -Ax_0 - By_0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0$.

Таким образом, показали, что координаты любой точки прямой L должны удовлетворять уравнению первой степени (3). Можно доказать и обратной: всякое уравнение (3) первой степени (относительно переменных x и y) определяет на плоскости R^2 некоторую прямую (перпендикулярную вектору n (A; B)).

Уравнение (2) называют уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данному вектору. Уравнение (3) называют общим уравнением прямой.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Под углом наклона прямой к оси $0x$ понимают угол, отсчитываемый в направлении движения, противоположным движению часовой стрелки, от положительного направления оси x до данной прямой.

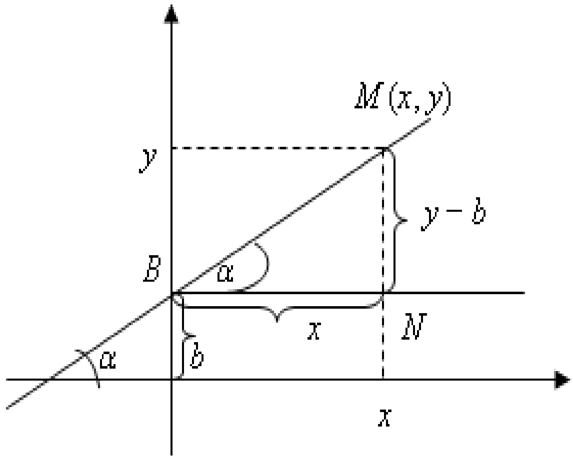
Тангенс угла наклона прямой к оси $0x$ называется **угловым коэффициентом** этой прямой и обозначается k.

1. Если прямая || оси $0x$, то $k = 0$. Если прямая $\perp$ оси $0x$, то k не существует (обращается в $\propto$).

2. Если известен угловой коэффициент k и величина b отрезка, отсекаемого прямой на оси $0y$, то как следует из рисунка, для произвольной точки M (x, y) этой прямой $\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow k = \frac{y-b}{x}$. Откуда

$$y = kx + b \qquad (4)$$

(4) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.



3. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$

Искомое уравнение L имеет вид $y = kx + b$. Но так как $M_0 \in L$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Значит, $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая это из предыдущего уравнения, имеем $y - y_0 = k(x - x_0)$.

4. Уравнение прямой L, проходящей через две заданные точки

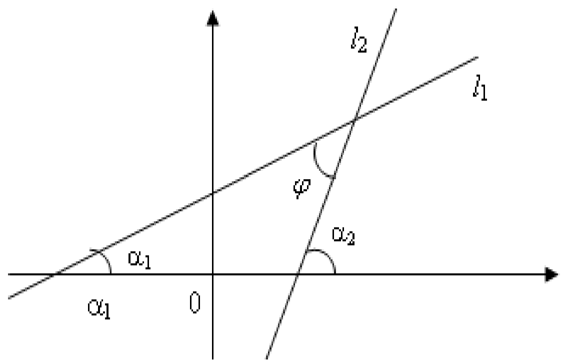
Пусть заданы $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$. Т.к. $M_1 \in L$, то L имеет вид (см. выше) $y - y_1 = k(x - x_1)$. Но этой же прямой должна принадлежать и точка M_2. Следовательно, M_2 удовлетворяет последнему уравнению: $y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Подставляя найденный коэффициент в уравнение $y-y_1=k\left(x-x_1\right)$ имеем $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$. Если разделим на (y_2-y_1) (при условии $y_2\neq y_1$), то имеем в итоге

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

5. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых

Определение. *Углом между двумя прямыми (см. Рис.) называется любой из двух углов, образованных прямыми при их пересечении.*

Пусть $\phi\ (0\le\phi\le\pi)$ – угол между прямыми l_1 и l_2, которые задаются уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, соответственно, где $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$. Тогда из рис. видно, что $\alpha_2=\alpha_1+\phi$. Откуда $\phi=\alpha_2-\alpha_1$. Тогда, пользуясь формулами тригонометрии, имеем



$$\operatorname{tg}\phi=\operatorname{tg}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Или
$$\operatorname{tg}\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (*)$$

Если прямые $||$, то $\phi=0$ и $\operatorname{tg}\phi=0\Rightarrow k_2-k_1=0$, т.е. $k_1=k_2$.

И наоборот, если $k_2=k_1$, то $\phi=0$, т.е. прямые $||$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является условие $k_2=k_1-$ равенство угловых коэффициентов.

Если прямые $\perp$, т.е. $\phi=\pi/2$, то $\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}+\alpha_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=$

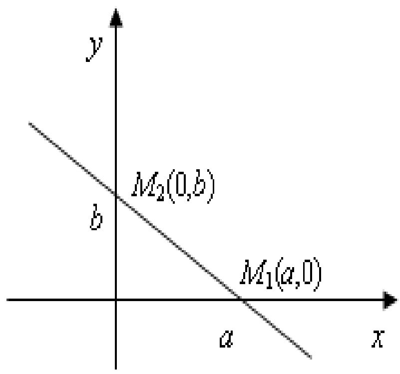
$-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$, т.е. $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ или $k_2\cdot k_1=-1$. И наоборот: если $k_2\cdot k_1=-1$, то из формулы (*) следует $\phi=\pi/2$, то есть прямые перпендикулярны.

Таким образом, для перпендикулярности прямых необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $k_2=-1/k_1$ (или $k_2\cdot k_1=-1$)

т.е. угловые коэффициенты взаимо-обратны с противоположным знаком.

6. Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая отсекает на осях координат Ox и Oy отрезки $a \neq 0$, $b \neq 0$, соответственно. Тогда легко видеть, что точки пересечения прямой с осями координат есть $M_1(a;\ 0)$, $M_2(0;b)$. Составим теперь уравнение прямой, проходящей через данные точки пересечения $M_1(a;\ 0)$, $M_2(0;b)$.

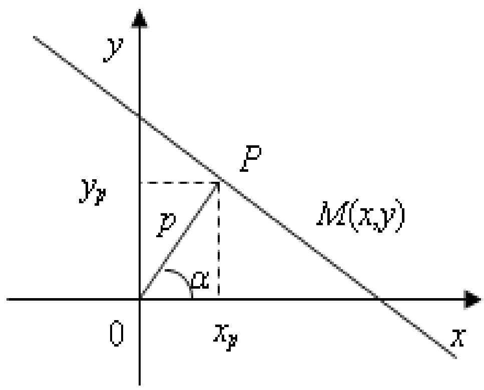


Имеем $\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ или $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

— уравнение прямой в отрезках.

7. Нормальное уравнение прямой (нормированное уравнение прямой)

Пусть на прямую (не проходящую через O), опущен перпендикуляр OP, длина которого p, а угол с осью $0x$ равен α. Из рис. $\Rightarrow$ $x_p = p \cdot \cos\alpha$, $y_p = p \cdot \sin\alpha$. Возьмем $\forall$ точку $M(x, y)$ на прямой. Т.к. прямые OP и PM взаимно-перпендикулярны, то



$$k_{OP} \cdot k_{PM} = -1.$$

Но $k_{OP} = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $k_{PM} = \dfrac{y_M - y_P}{x_M - x_P}$, (см. вывод уравнения прямой через две точки!), т.е. $k_{PM} = \dfrac{y - p \cdot \sin\alpha}{x - p \cdot \cos\alpha}$.

Тогда, подставляя найденное значение в равенство $k_{OP} \cdot k_{PM} = -1$, имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{y - p \cdot \sin\alpha}{x - p \cdot \cos\alpha} = -1 \quad \text{или} \quad y \cdot \sin\alpha - p\sin^2\alpha - p\cos^2\alpha + x\cos\alpha = 0.$$

Отсюда в итоге получим

$x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ — **нормальное уравнение прямой**.

Для него характерно:

1) сумма квадратов коэффициентов при переменных x и y равна 1;
2) свободный член (− p) – отрицателен.

Пусть дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ и для этой же прямой – ее нормальное уравнение $x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Т.к. эти уравнения определяют одну и ту же прямую, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т.е.

$$\cos\alpha = \mu\, A,\ \sin\alpha = \mu\, B,\ -p = \mu\, C.$$

Чтобы найти коэффициент μ, используем первые два равенства

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \mu^2\left(A^2 + B^2\right) \ \Rightarrow\ \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{A^2 + B^2}} \ -$$

так называемый ***нормирующий множитель***, т.е. множитель, после умножения на который общее уравнение приобретает вид нориального уравнения.

Для определения знака «μ» следует воспользоваться третьим равенством $mC = -p$, из которого следует, что знак μ выбирается противоположным знаку коэффициента C.

Пример.

$$3x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow \mu = +\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 0,2 \ \Rightarrow 0,2\cdot 3x + 0,2\cdot 4y - 0,2\cdot 5 = 0$$

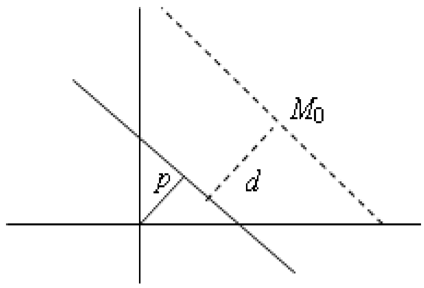
или $\quad 0,6x + 0,8y - 1 = 0$.

Вопрос: на каком расстоянии от начала координат находится данная прямая?
Ответ: на расстоянии $d = 1$ (это следует из смысла коэффициентов нормального уравнения прямой)!

8. <u>Расстояние от точки до прямой</u>

Задача. Найти расстояние d от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до прямой, заданной нормальным уравнением $\quad x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Для удобства, пусть пока O и M_0 лежат по разные стороны от прямой.
Уравнение прямой, проходящей через M_0 и $||$ данной прямой, имеет вид $x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - (p + d) = 0$ (вспомните смысл нормального уравнения прямой!). Точка M_0 лежит на этой прямой. Следовательно, ее координаты удовлетворяют этому уравнению , т.е. верно равенство $x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - (p + d) = 0$.



Отсюда $\quad d = x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$.

Нетрудно проверить, что если O и M_0 лежат по одну сторону от прямой (**Упр.**), то $\quad d = -\left(x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right)$.

Таким образом, объединяя эти выражения имеем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой:

$$d = \left| x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|$$

или с учетом вида нормирующего множителя μ

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-1,3)$ до прямой $3x + 4y - 5 = 0$.

Прежде надо найти нормальное уравнение данной прямой. Находим ***нормирующий множитель*** μ из равенства $\mu = \pm\sqrt{\dfrac{1}{A^2 + B^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3^2 + 4^2}} = \pm\dfrac{1}{5}$. Учитывая, что знак μ выбирается противоположным знаку коэффициента $C = -5$, получаем $\mu = \dfrac{1}{5}$.

Нормальное уравнение прямой имеет вид: $0,6x + 0,8y - 1 = 0$

Тогда $d = \left| 0,6 \cdot (-1) + 0,8 \cdot 3 - 1 \right| = 0,8.$

Или по второй формуле: $d = \dfrac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{\left| 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 - 5 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8$.

Глава VI. Прямая и плоскость в пространстве

- Общее уравнение плоскости
- Угол между плоскостями. Условия перпендикулярности («⊥») и параллельности («||») плоскостей
- Нормальное уравнение плоскости
- Расстояние от точки до плоскости
- Параметрическое уравнение прямой в пространстве
- Каноническое уравнение прямой в пространстве
- Угол между прямыми. Условия «||» и «⊥» двух прямых
- Угол между прямой и плоскостью. Условия «||» и «⊥» прямой и плоскости
- Точки пересечения прямой и плоскости

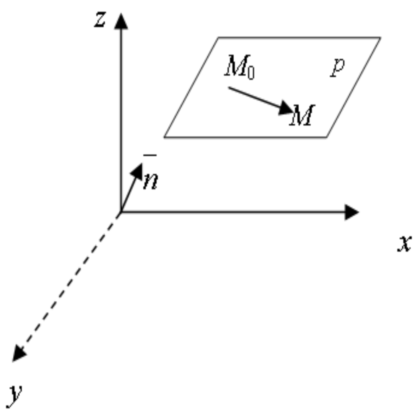
§ 1. Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости

Пусть плоскость P проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору n (A, B, C). Вектор n называют **нормальным вектором плоскости**. Эти условия определяют единственную плоскость в R^3. Найдем ее уравнение.

Возьмем в плоскости P произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда вектор

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ будет $\perp \bar{n}$.



Следовательно, их скалярное произведение равно 0.

$\left(\bar{n}, \overline{M_0M}\right) = 0$ – векторное уравнение плоскости.

Это равенство в координатной форме имеет вид

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярной заданному вектору.

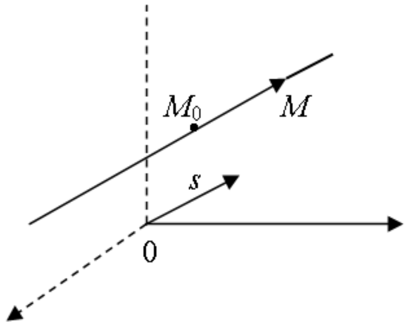
После преобразования последнее равенство принимает вид

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{– общее уравнение плоскости,} \qquad (**)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Упражнение. Если в (**) некоторые коэффициенты равны нулю, то такая плоскость имеет характерные особенности в расположении относительно осей координат. Проанализируйте!

2. **Угол между плоскостями. Условия перпендикулярности («⊥») и параллельности («||») плоскостей**



Пусть заданы две плоскости $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1,2$. Будем называть углом φ между плоскостями угол, образованный нормальными векторами этих плоскостей $n_i = (A_i, B_i, C_i)$, $i = 1,2$. Следовательно,

$$\cos\phi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости ⊥, то векторы n_1 и n_2 – ортогональны ⇒ их скалярное произведение = 0, т.е.

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ — условие перпендикулярности плоскостей.

Если плоскости ||, то векторы n_1 и n_2 – коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности *t*.

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = t$ — условие параллельности плоскостей.

3. **Нормальное уравнение плоскости**

По аналогии с прямой в R^2 можно вывести нормальное уравнение плоскости в виде

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0,$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – координаты вектора нормали плоскости единичной длины или, по-другому, α, β, γ – углы. образованные нормалью с координатными осями).

Нормирующий множитель μ (т.е. тот множитель, который общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводит к нормальной форме), имеет вид $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Знак μ выбирается противоположным знаку D (т.е . выбирает так, чтобы $\mu D < 0$). (Если $D = 0$, то знак μ – произвольный).

4. **Расстояние от точки до плоскости**

По аналогии с R^2 расстояние d от заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки **(Упр.)**

§ 2. Прямая в пространстве

1. Параметрическое уравнение прямой

Пусть даны точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ на прямой и вектор $\bar{s}=(l, m, n)$, лежащий на этой прямой (или ей параллельной). Вектор $\bar{s}$ называют еще **направляющим вектором прямой**.

Этими условиями однозначно определяется прямая в пространстве. Найдем ее уравнение. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на прямой. Ясно, что векторы $\overrightarrow{M_0 M}\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right)$ и $\bar{s}$ коллинеарны.

Следовательно, $\overrightarrow{M_0 M}=t \cdot \bar{s}-$ есть векторное уравнение прямой.

В координатной записи последнее уравнение имеет следующее параметрическое представление

$$\boxed{x=x_0+t \cdot l, \quad y=y_0+t m, \quad z=z_0+t n, \quad -\infty<t<+\infty,}$$

где t – «пробегает» промежуток $(-\infty, \infty)$, (т.к. точка $M(x, y, z)$ должна «пробегать» всю прямую).

2. Каноническое уравнение прямой

Исключив параметр t из предыдущих уравнений, имеем

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (=t)- \quad \text{каноническое уравнение прямой.}$$

3. Угол между прямыми. Условия «||» и «⊥» двух прямых

Пусть даны две прямые $L_i: \dfrac{x-x_i}{l_i}=\dfrac{y-y_i}{m_i}=\dfrac{z-z_i}{n_i}, \quad i=1,2$.

Определение. Углом между прямыми L_1 и L_2 назовем любой угол из двух углов, образованными двумя прямыми, соответственно параллельными данной и проходящими через одну точку (для чего возможно требуется совершить параллельный перенос одной из прямых).

Из определения следует, что один из углов равен углу φ между направляющими векторами прямых $\overline{s_1}=(l_1, m_1, n_1)$ и $\overline{s_2}=(l_2, m_2, n_2)$, [а второй угол тогда будет равен $(\pi-\phi)$]. Тогда угол определяется из соотношения

$$\cos \phi=\frac{\left(\overline{s_1}, \overline{s_2}\right)}{\left|s_1\right| \cdot\left|s_2\right|}=\frac{l_1 \cdot l_2+m_1 \cdot m_2+n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Прямые параллельны, если s_1 и s_2 коллинеарны $\Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\mathrm{t}$.

Прямые перпендикулярны $\Rightarrow s_1 \perp s_2 \Rightarrow l_1 \cdot l_2+m_1 \cdot m_2+n_1 \cdot n_2=0$.

4. Угол между прямой и плоскостью. Условия «||» и «⊥» прямой и плоскости

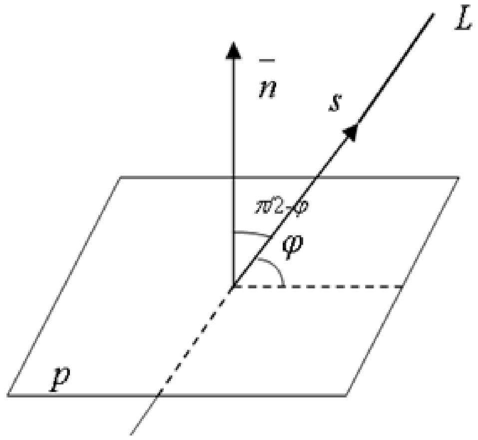
Пусть прямая L задана своим каноническим уравнением

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а плоскость P – уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Определение. Углом между прямой L и плоскостью p называется острый угол между прямой L и ее проекцией на плоскость.



Из определения (и рисунка) следует, что искомый угол φ является дополнительным (до прямого угла) к углу между вектором нормали $\bar{n}(A,B,C)$ и направляющим вектором $\bar{s}(l,m,n)$.

Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=\sin\phi=\frac{(\bar{s},\bar{n})}{|\bar{s}|\cdot|\bar{n}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

($|\,.\,|$ берется, чтобы получить острый угол).

Если $L\,||\,P$, то тогда $s\perp n\Rightarrow(\bar{s},\bar{n})=0\Rightarrow$

$Al+Bm+Cn=0-$ условие «||».

Если $L\perp P$, то тогда s коллинеарно $n\Rightarrow$

$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}-$ условие «⊥».

5. Точки пересечения прямой и плоскости

$L:\quad x=x_0+l\cdot t,,\qquad y=y_0+m\cdot t,\qquad z=z_0+n\cdot t;$

$P:\quad Ax+By+Cz+D=0.$

Подставив выражения для x, y, z в уравнение плоскости и преобразовав,

найдем $\quad t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}.$

Теперь, если подставить найденное «t» в параметрические уравнения прямой, то найдем искомую точку пересечения

Часть 3. Основы математического анализа

Одной из основных операций математического анализа является операция предельного перехода, которая встречается в курсе в различных формах. Мы начнем с самой простейшей формы операции предельного перехода, основанной на понятии предела так называемой числовой последовательности. Это облегчит нам введение и другой весьма важной формы операции предельного перехода – предела функции. В последующем конструкции предельных переходов будут использоваться в построении дифференциального и интегрального исчисления.

Глава VII. Числовые последовательности

- Понятие числовой последовательности. Арифметические операции над последовательностями
- Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности
- Связь бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.
- Простейшие свойства бесконечно малых последовательностей
- Предел последовательности.
- Свойства сходящихся последовательностей
- Арифметические операции над сходящимися последовательностями
- Монотонные последовательности
- Критерий сходимости Коши
- Число е и его экономическая иллюстрация.
- Применение пределов в экономических расчетах

§ 1. Числовые последовательности и простейшие свойства

1. Понятие числовой последовательности. Арифметические операции над последовательностями

Числовые последовательности представляют собой бесконечные множества чисел. Примеры последовательностей известны из школы:

1) последовательность всех членов бесконечной арифметической и геометрической прогрессий;
2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность;
3) последовательность чисел $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ приближающих число $\frac{1}{3}$.

Определение. *Если каждому значению n из натурального ряда чисел* $N=\{1,\ 2,\ \dots\}$ *ставится в соответствие по определенному правилу некоторое вещественное число* x_n*, то множество занумерованных вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots \qquad (1)$$

будем называть ***числовой последовательностью*** *(или просто последовательностью).*

Отдельные числа $x_3,\ x_5,\ x_n$ будем называть **элементами** или **членами** последовательности (1). Символ x_n называют **общим** или *n*-м членом данной последовательности. Придавая значение $n = 1, 2, \dots$ в общем члене x_n мы получаем, соответственно, первый x_1, второй x_2 и т.д. члены.

Последовательность считается заданной (см. Опр.), если указан способ получения любого ее элемента. Часто последовательность задают формулой для общего члена последовательности.

Для сокращения записи последовательность (1) иногда записывают как $\{x_n\}$. Например, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ означает последовательность $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dots,\ \dfrac{1}{n},\ \dots$; для $\left\{1+(-1)^n\right\}$ имеем $0, 2, 0, 2, \dots$.

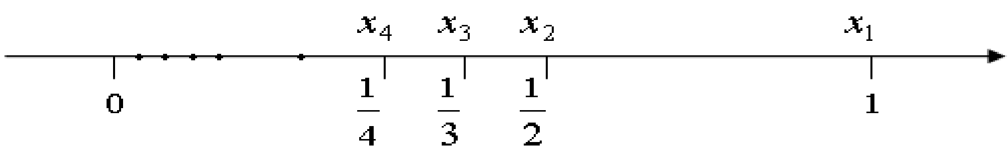
Структура общего члена (его формула) может быть сложной. Например,

$$x_n=\begin{cases} n, & \text{если n-четное} \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{если n-нечетное} \end{cases}, \qquad n\in N.$$

Иногда последовательность задается так называемыми **рекуррентными формулами**, т.е. формулами, позволяющими находить последующие члены последовательности по известным предыдущим.

Пример (числа Фибоначчи). Пусть $x_1=x_2=1$ и задана рекуррентная формула $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ для $n = 3, 4, \dots$. Тогда имеем последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, … (числа Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи).

<u>Геометрически</u> числовую последовательность можно изобразить на числовой оси в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим членам последовательности. Например, $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.



Рассмотрим наряду с последовательностью $\{x_n\}$ еще одну последовательность $\{y_n\}$:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots \qquad (2).$$

Определение. ***Суммой (разностью, произведением, частным)*** *последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *называется последовательность* $\{z_n\}$, *члены которой образованы по правилу* $z_n = x_n + y_n$

$$\left(z_n = x_n - y_n; z_n = x_n \cdot y_n; z_n = \frac{x_n}{y_n}, y_n \neq 0\right).$$

Произведением *последовательности* $\{x_n\}$ *на число* $c \in R$ *называется последовательность* $\{c \cdot x_n\}$.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если существует вещественное число M (m), такое что* <u>*каждый*</u> *элемент этой последовательности* x_n *удовлетворяет неравенству* $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$. *Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу* $m \le x_n \le M$. *Последовательность* x_n *называется неограниченной, если для* $\forall$ *положительного числа A (сколь угодно большего)* <u>*найдется хотя бы*</u> *один элемент последовательности* x_n, *удовлетворяющий неравенству* $|x_n| > A$.

Примеры.

$\{x_n\} = \{1/n\}$ – ограничена, т.к. $0 \le x_n \le 1$.

$\{x_n\} = \{n\}$ – ограничена снизу 1, но является неограниченной.

$\{x_n\} = \{-n\}$ – ограничена сверху (–1), но также неограниченная.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если для <u>любого</u> положительного вещественного числа ε (сколь бы малым его не взяли) существует номер N, зависящий, вообще говоря от ε, $(N = N(\varepsilon))$ такой, что при всех $n \ge N$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Пример. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если для* $\forall$ *положительного вещественного числа A (какое бы большое оно не было) найдется номер N* $(N = N(A))$ *такой, что при всех* $n \ge N$ *выполняется неравенство* $|x_n| > A$.

Замечание. Ясно, что всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, но не наоборот.

Пример.

1) $\{n\}$ – неограниченная последовательность и бесконечно большая;

2) 1, 2, 1, 4, 1, 8, … (на нечетном 1, четном 2^n). Эта последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой, т.к. при $A > 1$ неравенство $|x_n| > A$ не имеет место для нечетных номеров.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей устанавливает следующее утверждение:

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, и все $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой; и обратно, если $\{x_n\}$ – бесконечно малая, $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Если дана последовательность $\{x_n\}$, и из некоторого подмножества ее членов образована новая последовательность, порядок следования членов в которой такой же, как и в исходной последовательности, то она называется **подпоследовательностью** и обозначается $\{x_{n_k}\}$, $k \in N$, $n_{k_1} < n_{k_2}$, $k_1 < k_2$.

Пример. Для последовательности $\{(-1)^n\}$ последовательность $\{1, 1, \ldots\}$ и $\{-1, -1, \ldots\}$ являются подпоследовательностями исходной последовательности.

Простейшие свойства бесконечно малых последовательностей

1. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность*
2. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*
3. *Всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной.*
4. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

§ 2. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Введем **фундаментальное** понятие сходящейся последовательности.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***сходящейся***, *если существует такое вещественное число a, что последовательность* $\{x_n - a\}$ *является бесконечно малой. При этом, вещественное число a называется* ***пределом*** *последовательности* $\{x_n\}$. *Символически данный факт (то что последовательность сходящаяся и ее предел есть a) записывается так*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{или} \qquad x_n \to a \qquad \text{при } n\to\infty.$$

Используя определение бесконечно малой последовательности, мы можем дать другое эквивалентное определение сходящейся числовой последовательности предела.

Определение. *Число a называется пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *(сколь мало оно не было) найдется номер N (зависящий, вообще говоря, от ε, т.е. N = M (ε)) такой, что при всех* $n \ge N$ *элементы* x_n *этой последовательности удовлетворяют неравенству*

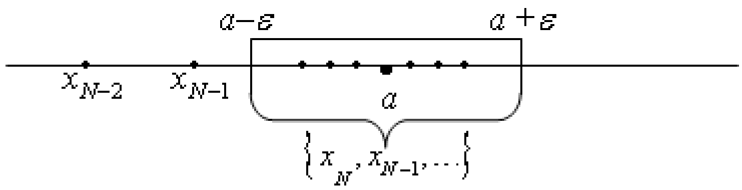
$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \ge N \qquad (*)$$

Последовательность, имеющая конечный предел называется ***сходящейся***, *в противном случае –* ***расходящейся***.

Из условия (*) следует, что верны следующие неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \qquad \forall n \ge N$$

Это позволяет дать следующую геометрическую иллюстрацию



Пример. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Покажем, что число $a = 0$ – предел этой последовательности. Действуя по определению, $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - a\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$ найдем номер

N, обеспечивающий выполнение требуемого неравенства $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Легко видеть, что требуемое число есть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[\, r\,]$ означает целую часть числа r.

Упр. Построить отрицание к определению предела числовой последовательности.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n \neq a\right) \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon^* > 0 \quad \forall N \quad \exists n^* > N \quad \left|x_{n^*} - a\right| \geq \varepsilon^*\right).$$

Пример. Доказать, что число $a = \frac{2}{5}$ <u>не</u> является пределом $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{5n-1}\right\}$.

Часто в теории пределов пользуются понятием $\varepsilon-$ окрестности точки.

Множество точек, удаленных на расстоянии не более, чем ε от данной точки a, т.е множество $x : |x - a| < \varepsilon$, называется **ε – окрестностью точки *a*.**

Тогда определение сходящейся последовательности можно перефразировать следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, если любая ее ε –окрестность содержит бесконечно много членов последовательности и лишь <u>конечное</u> число членов последовательности находится вне этой окрестности.

Приведенное определение удобно при исследовании свойств последовательностей

Свойства сходящихся последовательностей

1^0. *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

Доказательство. От противного. Пусть a и b, $a \neq b$ два предела. Т.к. a – предел для $\{x_n\}$, то вне интервала $(a-\varepsilon,\ \ a+\varepsilon)$ (т.е., вне ε–окрестности) должно находится лишь <u>конечное</u> число членов последовательности. Значит, отсюда следует, что b <u>не</u> может быть пределом последовательности $\{x_n\}$, если выбрать ε достаточно малым , например, $\varepsilon = \frac{b+a}{2}$(т.к. тогда окрестность точки «b» содержит лишь <u>конечное число</u> членов – см. геометрическую иллюстрацию).

2^0. *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится <u>к тому</u> же пределу, что и исходная последовательность.*

Доказательство. Если $a = \lim\{x_n\}$, то вне окрестности точки a находить <u>конечное</u> число членов последовательности $\{x_n\}$, а значит и любой ее подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.

Следствие. *Если из* $\{x_n\}$ *можно выделить* $\{x_{n_k}\}\to a$ *и* $\{x_{n_p}\}\to b,\ a\neq b$, *то это означает, что* $\{x_n\}$ *не имеет предела (см. пример* $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$*)*.

3^0. *Сходящаяся последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена.*

$\lim x_n = a \Rightarrow$ для $\varepsilon = 1$ имеем

$|x_n|-|a|\le|x_n-a|<1\ \ \forall n\ge N \Rightarrow |x_n|<|a|+1$, $\forall n\ge N\Rightarrow$ положим

$c=\max\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_{N-1}|,\ \ |a|+1\}\Rightarrow |x_n|<c,\ \ \forall n\ge N$.

Что и требовалось показать

Ниже приведены свойства пределов, касающиеся неравенств.

4^0. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ *и* $a<b$, *то* $x_n<y_n$, *начиная с некоторого номера N,* $(n>N)$.

Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\neq 0$, то x_n сохраняет знак, начиная с некоторого номера. Заметим однако, что если $x_n>0\ \ \forall n$, то $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\ge 0$. (см. например, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$).

5^0. («о двух милиционерах»)

Пусть имеются последовательности $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$, *такие что* $x_n\le y_n\le z_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема. *Если* $\{x_n\}\to a$, $\{y_n\}\to b$ *при* $n\to\infty$, *то*

1) $\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n = a\pm b$;

2) $\lim cx_n = c\lim x_n = c\cdot a$;

3) $\lim x_n\cdot y_n=\lim x_n\cdot\lim y_n = a\cdot b$;

4) $\lim x_n = a\neq 0\Rightarrow \exists\lim\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{\lim x_n}=\dfrac{1}{a}\cdot\left(\Rightarrow \lim\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}, y_n\neq 0, b\neq 0\right)$.

§ 3. Монотонные последовательности

Определение. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***неубывающей****, если* $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_{nn}\le\ldots$, *(<u>строго</u> возрастающей, если неравенства выполняются как строгие неравенства).*

Аналогично определяются невозрастающие и строго убывающие последовательности (с соответствующим изменением направления в неравенствах).

Возрастающие и убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности иногда объединяют одним названием – ***монотонные последовательности****.*

Монотонная возрастающая последовательность всегда ограничена снизу своим первым членом, монотонно убыв. – сверху первым членом.
По свойству 3^0 необходимым условием сходимости последовательности является ее ограниченность. Однако обратное неверно, т.е. просто ограниченность последовательности не гарантирует ее сходимость.

Пример. $\left\{(-1)^n\right\}$ не является сходящейся, хотя является ограниченной. (Упр. – доказать).

Оказывается, для монотонных последовательностей их ограниченность является уже и достаточным условием сходимости.

Теорема (Вейерштрасса) (критерий сходимости монотонных последовательностей)**.** *Для того, чтобы монотонная последовательность сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Как быть с произвольной (не монотонной) последовательностью?.

Определение. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ является* ***фундаментальной*** *(или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, что для всех $n \ge N$ и $m \ge N$ выполняется условие $\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$.*

Теорема (критерий сходимости Коши). *Для сходимости числовой последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы они были последовательностью Коши.*

Примеры. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$;

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2-5n} = \frac{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(2-\frac{5}{n})} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2};$$

3) $$\lim \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = \lim \frac{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = (\left|\cos n\right| \le 1) = \frac{0\cdot\{\text{огр}\}}{1+0} = \frac{0\cdot\{\text{огр}\}}{1} = 0;$$

4) $$\lim\left[\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}\right] = \lim \frac{\left(\sqrt{\ } - \sqrt{\ }\right)\left(\sqrt{\ } + \sqrt{\ }\right)}{\sqrt{\ } + \sqrt{\ }} = \frac{3n+1-3n}{\sqrt{\ } + \sqrt{\ }} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}} = 0$$

§ 4. Число *e* и его экономическая иллюстрация. Применение пределов в экономических расчетах

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Докажем, что эта последовательность имеет предел. Нам понадобится следующее ***неравенство Бернулли***

$$(1+h)^n \ge 1+nh \quad \text{для } h > -1,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Упр*. Доказать по индукции (Для $n = 1$ – верно. Пусть при $n = k$ верно, т.е. $(1+h)^k \ge 1+h\cdot k$. Умножим обе части на $(1+h) > 0 \Rightarrow$ $(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 \ge 1+(k+1)h$, т.к. $kh^2 \ge 0$, что и требовалось доказать)

Согласно неравенству Бернулли имеем $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$.

Обозначим $y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > 2$. Тогда для последовательности $\{y_n\}$ имеем $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$. Отсюда, воспользовавшись еще раз неравенством Бернулли, получим

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Big/ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n^n\cdot n^{n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \ge \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) = \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1,$$

т.е. доказали , что $y_{n-1} \ge y_n$.

Итак, имеем , что последовательность $\{y_n\}$:

1) монотонно убывает;

2) ограничена снизу числом 2.

Тогда, по критерию Вейерштрасса последовательность $\{y_n\}$ сходится (т.е. имеет конечный предел).

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left[x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n\cdot 1,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ ***также сходится***. ***Принято этот предел обозначить буквой «*** e ***»*** *:*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281\ldots\ . \qquad (**)$$

Отметим, что e – иррациональное число, оно играет важную роль в математике, его называют еще числом Эйлера (в знак признания его заслуг).

Соотношение (**) называют еще **замечательным** пределом.

К этому замечательному пределу (и, следовательно, к числу e) приводят многие задачи, связанные с непрерывным ростом какой-либо величины – например, рост процентов по вкладам, рост населения, размножения бактерий, радиоактивный распад.

Рассмотрим **пример** (Я.Н.Перельман), дающий интерпретацию числа e в задаче о ***сложных процентах***.

В сбербанках процентные деньги присоединяются к основному капиталу обычно ежегодно. Если присоединение (капитализация) совершается чаще, то капитал растет быстрее.

Возьмем чисто теоретический (упрощенный) пример. Пусть в банк положили 100 руб. под 100% годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 руб. превратятся в $100+\frac{100}{100}\cdot 100\% = 100(1+1) = 200$ руб.

Посмотрим теперь, во что бы превратились наши 100 руб., если бы процентные деньги присоединяли к основному капиталу каждые полгода (при той же ставке 100% за год): через полгода имеем $100+\frac{1}{2}\cdot 100\% = 100\left(1+\frac{1}{2}\right) = 150$ руб., а еще через полгода уже имеем $150+\frac{150}{2}\cdot 100\% = 150\left(1+\frac{1}{2}\right) = 225$ руб., т.е. суммарную величину по истечении года можно представить как : $100\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 225$ руб.

Если присоединение денег делать каждые $\frac{1}{3}$ года, то по истечении года 100 руб. (при той же ставке) превращаются в сумму: $100\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 237$ руб.

Будем теперь учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года; дл 0,01 года и т.д. Тогда из 100 рублей спустя год получается:

$$100\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 259, \quad 100\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 270, \; 100\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 271.$$

При безграничном сокращении сроков присоединения процентов наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоему пределу, приблизительно равному 271 руб. Более чем в e раз капитал, положенный под 100% годовых, увеличиться не может, даже если бы наросшие проценты присоединяли ежесекундно, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Примеры.

1) Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$. $\left[= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1 \right]$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Т.к. $|x_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, то для нахождения требуемого в определении N_ε достаточно решить неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{3n^2-4} + \frac{\sqrt{n}+5}{n+2}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{Применить теорему о пределе частного} \\ \text{не можем, т.к.} \to \infty \Rightarrow \text{ преобразуем}\end{array}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n^2}\right)} + \frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right] = \frac{1}{3} + \frac{0}{1} = \frac{1}{3}.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-5}{3n+1}\right)^6=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(4-\frac{5}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}\right]^6=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right]^6=\left(\frac{4}{3}\right)^6.$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}.$$

Глава VIII. Предел и непрерывность функции одной вещественной переменной

- Понятие функции
- Предел функции
- Односторонние пределы
- Свойства пределов функций
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
- Понятие неопределенности
- Первый замечательный предел
- Второй замечательный предел
- Сравнение функций
- Непрерывность функций в точке
- Свойства непрерывных функций
- Односторонняя непрерывность.
- Точки разрыва и их классификация
- Свойства непрерывных на отрезке функций

§ 1. Предел функции

1. Понятие функции. Отражением факта, что многие из окружающих явлений взаимосвязаны и зависят друг от друга, в математике служит понятие функциональной зависимости величин. Математическую строгость понятию функции первыми придали Лейбниц, Бернулли.

Определение. *Пусть X и Y – заданные множества* $(X \subseteq R, Y \subseteq R)$. *Если <u>каждому</u> элементу* $x \in X$ *по определенному правилу* f *поставлен в соответствие один элемент* $y \in Y$, *то говорят, что задана функциональная зависимость y от x, или, по-другому, – задана функция* $y = f(x)$.

При этом x называют независимой переменной (аргументом), y - зависимой переменной, множество X – областью определения, Y – областью значений функции. Часто функцию записывают символически $f: X \to Y$.

Если переменные $x \in X$, $y \in Y$ рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то действительная функция $f: X \to Y$ действительного переменно x может быть изображена в виде <u>графика</u>.

Определение. *Графиком функции* $y = f(x)$, $x \in X$, *называется геометрическое место точек плоскости Oxy вида*

$$\{(x, y),\ x \in X;\ y = f(x)\}$$

[*абсциссы x которых принадлежат X, а ординаты находятся из соотношения* $y = f(x)$].

Таким образом, задать функцию – это значит определить три ее элемента:

1) область определения X;

2) область значений Y;

3) указать закон (правило, формулу, …) f, по которому каждому значению аргумента x ставится в соответствие (вычисляется) значения зависимой переменной y из ее области значений Y.

Очевидным образом определяются понятия возрастающих, убывающих (строго, нестрого), монотонных, ограниченных функций (см. соответствующий раздел числовых последовательностей) .

Существуют различные способы задания функций: **табличный, графический, описательный, аналитический** (т.е., в виде формулы), **программный** и **др**.

Простейшими элементарными функциями являются

1) $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R -$ степенная функция;

2) $y = a^{x},\ a \in R,\ a \neq 1,\ a > 0 -$ показательная;

3) $y = \log_a x$;

4) тригонометрические;

5) обратные тригонометрические.

Из этих функций посредством арифметических операций можно образовать много других функций.

Еще один способ образовывать новые функции заключается в операции суперпозиции функций (или образование так называемой сложной функции). Если на некотором множестве X определена функция $z = \psi(x)$ с множеством значений Z, а на Z – определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\psi(x))$ называется суперпозицией функций (или сложной функцией)

$$\left[\psi : X \to Z, \quad f : Z \to Y, \quad \text{т} \quad f \circ \psi : X \to Y\right].$$

Пример. $y = \operatorname{tg}(\ln x),\quad y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Определение. *Функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью арифметических операций, а также путем суперпозиций этих функций составляют класс элементарных функций.*

Примеры (неэлементарных функций)**.**

Функция, задаваемая формулой Вейерштрасса $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 3^n x}{2^n}$

Функция Дирихле $y=\begin{cases}1, & x-\text{рациональное число},\\ 0, & x-\text{иррациональное число}.\end{cases}$

2. Понятие предела функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором числовом множестве X и точка x^0 является предельной точкой этого множества, т.е. в любой ε - окрестности точки x_0 содержатся точки множества X, $x\in X$, отличные от x_0 , $x\neq x_0$.

[ε - окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$].

Из определения предельной точки следует, что сама предельная точка x_0 может как принадлежать множеству X, так и не принадлежать ему.

Например. $\left|\begin{array}{l} X=(0,1],\ x_0=0\ -\text{предельная, но}\ x_0\notin X,\\ X=[0,1],\ x_0=0\ -\text{предельная, и}\ x_0\in X.\end{array}\right.$

Следовательно, если предельная точка $x_0\notin X$, то функция $y=f(x)$ не определена в точке x_0 .

Далее, возьмем во множестве X последовательность точек $x_i, i=1,\ \ldots, n,\ \ldots,\ x_i\neq x_o,\ x_i\in X$, сходящуюся к точке x^0 :

$$x_1, x_2,\ \ldots, x_n,\ \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0\quad . \tag{1}$$

Значения функции $y=f(x)$ определены для всех $x=x_i$, поэтому эти значения также образуют числовую последовательность, по отношению которой можно ставить вопрос о ее сходимости

$$f(x_1), f(x_2),\ \ldots, f(x_n),\ \ldots\ . \tag{2}$$

Определение. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ (этот факт записывается $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ или $f(x)\underset{x\to x_0}{\to}A$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x функций, отличных от x_0 и сходящаяся к точке x_0, $x_n\underset{n\to\infty}{\to}x_o$, $x_n\neq x_0$ соответствующая последовательность значений $\{f(x_n)\}$ функции $f(x)$ сходится к числу A:*

$$\left(f(x_n)\to A\quad \text{при}\quad n\to\infty\right).$$

Кратко этот факт иногда записывают в виде

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\{x_n\},\ x_n \neq x_0,\ n_0 \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A \quad n\to\infty .$$

Это определение дано на основании понятия предела числовой последовательности – говорят, определение по Гейне.

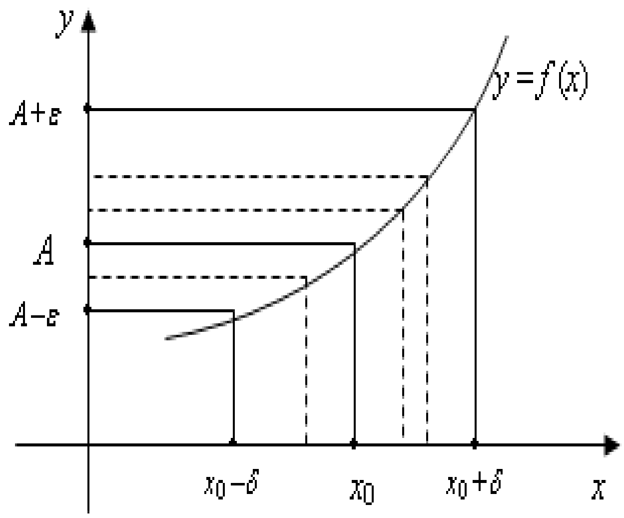
Можно дать и другое, эквивалентное, определение предела функции на языке «$\varepsilon - \delta$» – окрестностей – или определение по Коши.

Определение. *Число A называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x=x_0$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *такое, что для всех* $x\in X\ (x=x_0)$, *удовлетворяющих неравенству* $|x-x_0|<\delta$, *выполняется неравенство* $|f(x)-A|<\varepsilon$

Кратко записывают в виде:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ x\neq x_0 : |x-x_0|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon$$

Геометрическая иллюстрация



Пример. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $\quad x_0=3$.

Решение. Область определения есть $X=R\setminus\{x=3\}$. Так как сама точка $x_0=3$ не участвует в вычислениях, то можем преобразовать

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to3} f(x)=6$. Возьмем $\forall\varepsilon>0$ и для разности значений $|f(x)-A|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$ найдем требуемое δ. Очевидно, можно взять $\delta=\varepsilon$. Тогда для всех x:

$|x-3|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|=|x-3|<\varepsilon=\delta$.

Односторонние пределы

Определение. *Число* A *называется правым пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *если для* $\forall\{x_n\},\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0,\ x_n > x_0$, *соответствующая последовательность значений* $\{f(x_n)\} \underset{n\to\infty}{\to} A$. *При этом, правый предел обозначают* $A = f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x)$. *Аналогично, определяется левый предел* $A = f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Связь между односторонними пределами и пределом функции в точке устанавливается следующим утверждением:

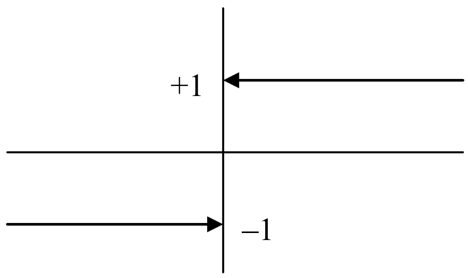
Теорема. *Функция* $f(x)$ *имеет предел в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в этой точке существует правый и левый пределы и они равны. В этом случае их общее значение является пределом функции в точке* x_0

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Т.о., если односторонние пределы существуют, но не равны, то тогда предел функции в этой точке не существует.

Пример.

$f(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad X = R\setminus\{0\} \quad x_0 = 0$



$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = 1 \quad \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1$

$f(x_0-0) \neq f(x_0+0) \ \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ – нет предела в точке $x_0 = 0$.

Свойства пределов функций

Ранее отмечались уже свойства пределов числовых последовательностей, которые представля N ют собой пределы функций, определенных на специальном множестве – множестве натуральных чисел так что члены последовательности есть $a_n = f(n)$. Нетрудно видеть, что эти свойства переносятся и на общий случай пределов функций.

Теорема. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют в точке* $x = x_0$ *предел* $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *то:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot A$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)B} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{2\cdot 4 - 3\cdot 2 + 6}{4 + 3\cdot 2 + 2} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Понятие неопределенности

Важную роль играют функции, предел которых равен 0 или $\propto$.

Определение. *Функция* $f\ (x)$ *называется бесконечно малой (б.м.ф.) в точке* $x = x_0$, *если предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. *Аналогично определяются б.м.ф. при* $x \to \pm\infty$, *при* $x \to x_0 \pm 0$ *(односторонние)*

Свойства бесконечно малых функций похожи на соответствующие свойства бесконечно малых последовательностей.

Например. $y = x \cdot \cos\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.Т.к. $y = x$ – б.м. в т. $x_0 = 0$, а $y = \left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \le 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \cos\dfrac{1}{x} = 0$ (как произведение б.м. на ограниченную функцию).

Если значения функции $f\ (x)$ стремятся к бесконечности при $x \to x_0$ $\left[f(x) \underset{x\to x_0}{\to} \infty \right]$, то можно ввести следующее понятие (бесконечного) предела.

Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(+\infty$ или $-\infty)$, если для $\forall M > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0$ что для всех $|x - x_0| < \delta$ выполнено условие $|f(x)| > M$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (б.б.ф.) в точке $x = x_0$, если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. Аналогично определяются б.б.ф. при $x \to \pm\infty$, при $x \to x_0 \pm 0$.*

Связь между б.м.ф. и б.б.ф.:

если f – б.б.ф. в точке $x = x_0$, то $\frac{1}{f}$ – б.м.ф. в точке $x = x_0$ и наоборот (если $f \neq 0$).

Понятие неопределенностей.

Часто при вычислении пределов функций встречаются выражения вида $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б.м.ф. в точке $x = x_0$. В этом случае такое выражение символически записывают как $\frac{0}{0}$ и называют неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Аналогично, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.б.ф. в точке x_0, то выражение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ называют неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim \frac{x-3}{x-1} = \frac{2-3}{2-1} = -1$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x + 2}{7x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(5 + \frac{2}{x})}{x(7 + \frac{1}{x})} = \frac{5+0}{7+0} = \frac{5}{7}$.

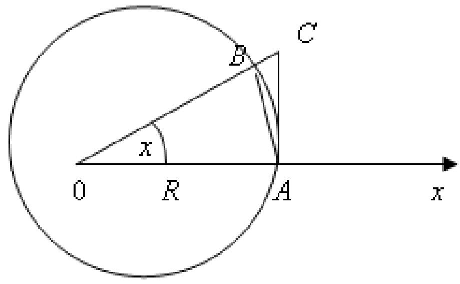
3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^5 - 3x^3 + 9} = \lim \frac{x^5\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{7}{x^4}\right)}{x^5(1+)} = \frac{0}{1} = 0$.

Подобным образом **возникают** неопределенности других типов: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞. Раскрыть неопределенность – это значит найти предел выражения (если он $\exists$), что зависит от поведения конкретных функций, входящих в эти выражения.

§ 2. Замечательные пределы. Сравнение функций. Символы O и o

Первый замечательный предел.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$



Рассмотрим круг радиуса R и сделаем дополнительные построения (см. рисунок).

Доказательство. Из рисунка следует неравенство $S_{\Delta AOB}<S_{cektopAOB}<S_{\Delta OAC}$ или, используя равенство $h=R\sin x$ и формулы для площадей сектора и треугольников Δ, имеем

$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x$ или после сокращения

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x\ .$$

Теперь в последнем неравенстве перейдем к пределу при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\cos x<\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}<\lim 1\Rightarrow 1<\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}<1.$$

Факт $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1-$установим позже в разделе непрерывность функций. Свойство о “2-х милиционерах” справедливо и для пределов функций. Таким образом, доказали требуемое утверждение.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{3}=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{5}{3}=\lim\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{4}=2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Его доказательство сводится к использованию уже известного предела числовой последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\underset{x\to\infty}{\to}e$.(**Упр.**)

Пределы вида $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ сводятся заменой $y=\dfrac{1}{x}$ к пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$.

Пример. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\left[y=\dfrac{2}{x}\right]\to$

$\to\left[\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{y}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{2}=e^{2}..$

Некоторые другие важные пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\left(a=e\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\ln e=1\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a\left(a=e:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Сравнение функций

Рассмотрим бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, причем $g(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Определение. 1. *Функция* $f(x)$ *называют* ***эквивалентной*** $g(x)$ *при* $x\to x_0$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ($f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$).

Пример: $\sin x\sim x,\ x\to 0$.

2. *Говорят, что функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *при* $x\to x_0$ *одного порядка малости, если* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c,\quad c\neq 0,\quad c\neq\infty$.

Этот факт записывают иногда как $\left(f(x)=O[g(x)]\right)$ и говорят, что функция f есть «О-большое» от функции g

3. *Говорят, что функция* $f(x)$ *большего порядка малости, чем функция* $g(x)$ *при* $x\to x_0$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$. Этот факт записывают иногда как $\left(f(x)=0[g(x)]\right)$ и говорят, что функция f есть «о-малое» от функции g.

Можно проверить, что имеют место следующие эквивалентности:

1) $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \left(e^x - 1\right) \sim \ln(1+x)$ при $x \to 0$;

2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$; и др.

Эквивалентность функций может быть использована при вычислении пределов функций.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[1+(\cos x - 1)\right]}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 16x}{\ln(1+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{16x}{2x} = 8$.

§ 3. Непрерывность функции в точке

С пределом функции тесно связано одно из важных понятий математического анализа – непрерывность функции (значительный вклад внесли Больцано, Коши).

Пусть функция $y = f(x)$ является предельной точкой, принадлежащей множеству X.

Определение 1. *Функция $y = f(x),\ x \in X$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если она определена в самой точке x_0, а также в некоторой ее окрестности и справедливо следующее равенство*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f\left(x_0\right) \tag{1}$$

т.е. существует предел функции в точке x_0 и этот предел равен значению функции в этой точке.

Символически (1) можно записать как $\lim\limits_{x\to 0} f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, т.е. возможен предельный переход под знаком функции.

Определение непрерывности можно сформулировать на языке последовательностей или на языке «ε–δ».

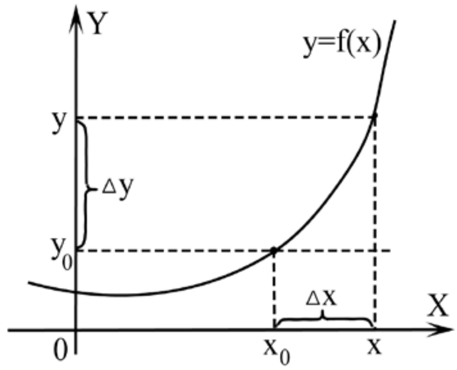
Определение 2. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 при $n \to \infty$,* *соответствующая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *сходится к числу* $A = f(x_0)$. $\left(\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\to} x_0\right) \Rightarrow \left(\{f(x_n)\} \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)\right)$.

Определение 3. *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, *что для* $\forall x$, *такого что* $|x - x_0| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

<u>Дадим еще одно</u> определение непрерывности, эквивалентное определению 1.

Разность $\Delta x = x - x_0$ – называют **приращением аргумента** в точке x_0, а величину разности $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ называют **приращением функции**, соответствующим приращению аргумента Δx.



Таким образом,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x) .$$

Тогда равенство (1) можно переписать в виде (перенося $f(x_0)$ и поднося его по знак «lim»)

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 .$$

Следовательно, можно сформулировать

Определение 4. *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, *если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при* $\Delta x \to 0$ $(x \to x_0)$.

Из определения б.м.ф. $\Rightarrow$:

Определение 5. *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *если малое приращение аргумента вызывает малое приращение функции,*

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon$.

Свойства непрерывных функций

1. Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* $x = x_0$, *то функции*

$$f(x) \pm g(x),\ c \cdot f(x),\ (c - \text{const},\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},\ (g(x_0) \neq 0)$$

являются также непрерывными в точке $x = x_0$.

2. *Непрерывность сложной функции. Если функция* $z=\phi(x)$ *непрерывна в точке* $x=x_0$, *а функция* $y=f(z)$ *непрерывна в точке* $z_0=\phi(x_0)$, *то тогда сложная функция* $y=f(\phi(x))$ *непрерывна в точке* $x=x_0$. *Это символически записываю как* $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$

(т.е. «lim» можно переставлять под знаком непрерывной функции f.).

§ 4. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация

Определение. *Функция* $y=f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x=x_0$:

слева – если $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$,

справа – если $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Отсюда следует, что непрерывность функции можно определить еще так: функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$ (т.е. является непрерывной, если она одновременно непрерывна слева и справа).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Определение. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва*** *функции* $y=f(x)$, *если функция в этой точке не определена, или же не является в ней непрерывной* [т.е. предел $f(x)$ в точке x_0 либо не существует, либо существует, но не равен $f(x_0)$!].

Дадим классификацию точек разрыва.

Определение. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва I рода*** *функции, если в этой точке существуют* $f(x_0-0)$ *и* $f(x_0+0)$, *но* $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. *При этом величина разности* $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ *называется* ***скачком*** *функции в точке* x_0.

Пример. $y=\operatorname{sign} x$, $y=|x|/x$.

Определение. *Точка* x_0 *называется точкой* ***устранимого разрыва***, *если* $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ *(либо* $f(x)$ *не определена в точке* x_0*). Следовательно, чтобы устранить разрыв в точке* x_0, *достаточно положить* $f(x_0)=f(x_0\mp 0)=f(x_0+0)$, *т.е. надо изменить значение функции в одной точке.*

Пример. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, в точке $x = 0$ не определена, но если ввести функцию как $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ то непрерывность в точке $x = 0$ есть.

Определение. *Точка x_0 называется* ***точкой разрыва II рода****, если в этой точке функция $f(x)$ либо не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов, либо хотя бы один из односторонних пределов является бесконечным.*

Примеры.

1) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0 -$ II рода, т.к. $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

2) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, $x = 0 -$ II рода, т.к. $\lim \sin\dfrac{1}{x}$ не существует ни справа, ни слева.

§ 5. Свойства непрерывных на отрезке функций

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке $x \in [a,b]$ этого отрезка (при этом в точке $x = a$ непрерывна справа, а в точке $x = b$ непрерывна слева).*

Определение. *Если $f(x)$ определена на множестве X и $\exists\ x_0 \in X$, что для всех $x \in X$ верно неравенство $f(x_0) \leq f(x)$, то число $f(x_0)$ называет* ***наименьшим*** *значением функции $f(x)$ на множестве X. Аналогично определяем наибольшее значение.*

Непрерывные функции обладают рядом замечательных свойств.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса).
Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является ограниченной функцией.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса).
Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений (заметим, что точки, в которых достигают наибольшее и наименьшее значения не обязательно единственны).

Теорема (Больцано – Коши о промежуточном значении).
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $(A \neq B)$, $A < B$, то для любого значения C, $A < C < B$ существует точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = C$.

Следствие. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значение разных знаков, то $\exists\ x_o \in [a,b]$, где $f(x_0) = 0$.*

Часть 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Понятие производной появилось в работах Лейбница, Ньютона, Лагранжа. Это понятие составляет основу дифференциального исчисления. К использованию производных приводят многие задачи по исследованию различных *процессов,* т.е. явлений, которым присущи *изменения*, что естественно для окружающего мира.

Глава IX. Дифференцирование функции одной вещественной переменной

- Задачи, приводящие к понятию производной.
- Определение производной и ее простейшие свойства
- Геометрический смысл производной
- О связи дифференцируемости и непрерывности функций
- Основные правила дифференцирования
- Логарифмическая производная.
- Дифференцирование сложных функций
- Дифференцирование обратной функции
- Дифференцирование неявных функций
- Таблица производных основных элементарных функций
- Производные высших порядков
- Понятие дифференциала функции
- Геометрический смысл дифференциала
- Применение дифференциала в приближенных вычислениях
- Применение производной в экономике
- Эластичность функций

§ 1. Производная функции

1. Предварительные соображения. (Задачи, приводящие к понятию производной).

К понятию производной мы приходим всякий раз, когда требуется изучить скорость изменения, в том числе и в экономике – скорость роста, ускорение роста, темпы роста и др. Природу производной легче понять, если ее представить как скорость (так именно и поступил Ньютон).

а) Рассмотрим механическую задачу определения мгновенной скорости точки, движущейся прямолинейно с переменной скоростью.

Пусть $s = s(t)$ – уравнение движения точки, т.е. зависимость пройденного пути s от времени t. Пусть $s_0 = s(t_0)$ – путь, пройденный точкой к моменту $t = t_0$, а $s_1 = s(t_1)$ – путь, пройденный точкой до момента $t_1 = t_0 + \Delta t$, где $\Delta t > 0$ некоторая малое число. Тогда путь, пройденный за время $\Delta t = t_1 - t_0$ равен $s_1 - s_0 = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s$.

Так как скорость – переменная величина, то мы можем вычислить ее среднюю скорость за время $\Delta t : v_{\text{ср.}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ – как отношение пройденного пути к затраченному времени. Если бы точка двигалась с постоянной скоростью, то найденная средняя скорость была бы одинаковой на всем промежутке движения. Однако движения точки неравномерно, а значит, скорость точки непрерывно меняется. Во многих случаях надо знать скорость движения в разные моменты времени (например, с какой скоростью вылетевшая из ружья пуля долетает до человека (если скорость пули = 0, то пуля упадет, если скорость достаточно велики ≈ 300 м/сек., то человек упадет!)).

Мгновенная скорость v_m в момент t_0 получается как предел средней скорости при безграничном уменьшении промежутка времени $\Delta t : v_m = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Говорят, что мгновенная скорость – это скорость за бесконечно малый промежуток.

Замечание. По физическому смыслу, при «безграничном уменьшении $\Delta t \to 0$» заданный момент времени t_0 есть не что иное как «нулевой промежуток времени» $\Delta t = t_1 - t_0 = 0$, но за «нулевой промежуток» времени точка, разумеется, проходит нулевое расстояние. Следовательно, если бы решили вычислять мгновенную скорость также как и среднюю скорость, т.е. деля пройденное расстояние на требующееся для этого время, то получили бы выражение $\dfrac{0}{0}$, которое не имеет смысла. Выход был найден в построении последовательности средних скоростей, и определение той величины, к которой стремится эта последовательность.

б) Нахождение производительности труда. Пусть функция $z = z(t)$ выражает количество z произведенной рабочим продукции за время работы t. Вычислим количество произведенной продукции за время $\Delta t = t_1 - t_0$:

$$\Delta z = z(t_1) - z(t_0) = z(t_1 + \Delta t) - z(t_0).$$

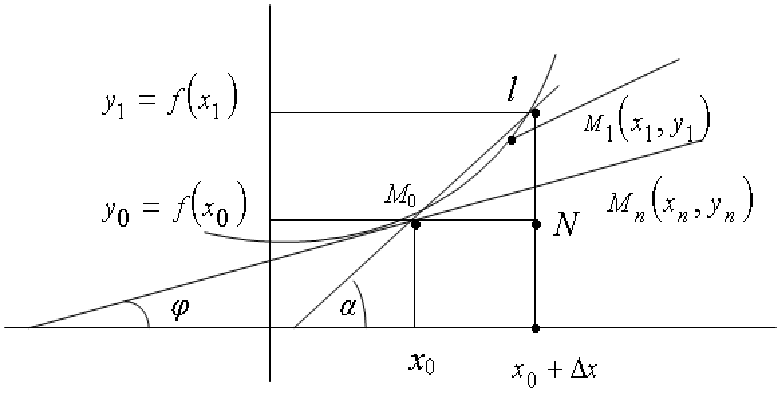
Тогда средняя производительность труда рабочего на промежутке времени $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$ есть $z_{\text{ср.}} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$. Если существует конечный предел

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

то он называется производительностью труда рабочего в момент t_0.

в) Геометрическая задача о проведении касательной к плоской кривой.

Пусть $y = f(x),\ x \in X$ – непрерывная функция, график которой в декартовой системе координат Oxy представляется кривой l.



Если $M_1 \neq M_0$, то прямая M_0M_1 (см. Рис.) называется секущей.

Определение. *Предельное положение секущей M_0M_1, когда точка $M_1 \xrightarrow{\text{по кривой}} M_0$ называется касательной к кривой в точке M_0.*

Из построений видно, что угловой коэффициент секущей M_0M_1 равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_1N}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Так как $M_1 \to M_0$ эквивалентно $\Delta x \to 0$, то угловой коэффициент касательной к кривой l получаем как предел (если он $\exists$ и конечен):

$$k = \operatorname{tg}\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Определение производной и ее простейшие свойства

Пусть функция $y = f(x),\ x \in X$ определена в точке $x_0 \in X$ и ее некоторой окрестности. Придавая произвольное приращение Δx точке x_0 так, чтобы $x_0 + \Delta x \in X$, получаем приращение Δy функции $y = f(x)$, соответствующее приращению Δx, равное $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. *Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ называется предел отношения*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если он существует и конечен.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используются несколько обозначений: $y',\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Процесс нахождения производной функции $f(x)$ называется **дифференцированием функции**.

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется **дифференцированной в точке** x_0.

Замечание. Определение дифференцируемости функций может быть дано следующим образом: Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, где A – постоянная, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция.

Оказывается, имеет место **утверждение**: *Функция* $f(x)$ – *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда для функции* f *в точке* x_0 *существует конечная производная* $f'(x_0)$ (т.е. если $A = f'(x_0)$ в предыдущей формуле). Фактически, эту эквивалентность мы и использовали в приведенном определении.

Функция, дифференцируемая во всех точках множества X, называется **дифференцируемой на X**.

Если в определении производной рассматриваются односторонние пределы, то получаем соответствующее определение левой и правой производной в точке x_0:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Примеры. 1) Найти $f'(-2)$, если $f(x) = 3x^2 + 1$.

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(-2 + \Delta x)^2 - 3(-2)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = -12.$$

2) Найти производную функции $y = \sin x, x \in R,$ в произвольной точке $x \in R^1$.

Имеем $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x.$$

<u>Геометрический смысл производной</u> следует из определения и приведенных в п.1 пояснений о проведении касательной к графику функции. Отсюда следует, что *угловой коэффициент касательной к графику функции в точке* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *равен* $k = \mathrm{tg}\,\phi = f'(x_0)$. Следовательно, уравнение касательной в точке M_0 (прямая с заданным угловым коэффициентом k, проходящая через заданную точку M_0) есть

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

<u>Физический смысл</u> для материальной точки с уравнением движения $s = s(t)$. *Мгновенная скорость в момент* t_0 *равна* $v(t_0) = s'(t_0)$.

3. О связи дифференцируемости и непрерывности функций

При определении производной мы предполагали:

1) существование $f(x)$ в точке x_0 и ее окрестности;

2) существование предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Как это связано с непрерывностью функции?

Теорема. *Если функция дифференцируема, то она непрерывна.*

Доказательство. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. $\Rightarrow$ $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x \Rightarrow$ При $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta y \to 0$, что означает непрерывность функции $f(x)$.

Замечание. Обратное утверждение <u>неверно</u>.

Примеры. 1) $y = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Эта функция непрерывна в точке $x_0 = 0$ так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = 0$ (т.к. $x \cdot \sin x$ есть б.м.ф.). Однако производная в точке $x_0 = 0$ не существует, т.к. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x}$ – не существует.

2) $y = |x|$ – непрерывна. Однако $f'(0-0) = -1 \neq 1 = f'(0+0)$.

Замечание. а) Существуют функции, которые во всей области определения (т.е. везде) являются разрывными (например, функция Дирихле).
б) Существуют непрерывные функции, везде не имеющие производной. (примеры таких функций даны Вейерштрассом, Лагранжем (функции типа «зубьев пилы») и др.).

§ 2. Основные правила дифференцирования. Логарифмическая производная. Таблица производных основных элементарных функций

Изложим (**Упр.** –доказать) основные правила дифференцирования: арифметических выражений.

Теорема. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функции: cu, $u\pm v$, $\frac{u}{v}$ ($v\neq 0-$в окрестности точки x_0), являются также дифференцируемы в точке x_0, причем справедливы следующие формулы:*

$$(cu)'=c\cdot u',\ (u\pm v)'=u'\pm v',(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v',\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Пример. Вычислить производную функции $y=(3x^3-2x+1)\cdot\sin x$.

Функция представляет собой произведение двух функций, поэтому следует применить правило дифференцирования произведения, а затем правило дифференцирования суммы и табличные производные степенной функции и синуса:

$$y=\left(\underbrace{(3x^3-2x+1)}_{u}\cdot\underbrace{\sin x}_{v}\right)'=\left[(uv)'=u'v+uv'\right]=$$

$$=(3x^3-2x+1)'\cdot\sin x+(3x^3-2x+1)\cdot(\sin x)'=$$

$$=(9x^2-2)\cdot\sin x+(3x^3-2x+1)\cdot\cos x.$$

2) Дифференцирование сложных функций.

Теорема. *Если функция $z=\phi(x)$ имеет производную в точке x_0 равную $z'_x=\phi'_x(x_0)$, а функция $y=f(z)$ имеет в соответствующей точке $z_0=\phi(x_0)$ производную $y'_z=f'_z(z_0)$, то сложная функция $y=f(\phi(x))$ имеет производную y'_x в точке x_0, равную* $y'_x=y'(x_0)=y'_z\cdot z'_x=f'_z(z_0)\cdot\phi'_x(x_0)$.

Пример. Найти производную функции $y=e^{x^2}$.

Представим функцию $y=e^{x^2}$ в виде суперпозиции двух функций: $y=e^u$ и $u=x^2$. Имеем: $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'_u\cdot(x^2)'_x=e^u\cdot 2x$. Подставляя x^2 вместо u, получим $y=2xe^{x^2}$.

3) Дифференцирование обратной функции.

Если для функции $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, *существует* *обратная* *функция* $x = \phi(y)$, $y \in Y$, *которая в точке* $y_0 \in Y$ *имеет производную* $\phi'(y_0) \neq 0$, *то в точке* $x_0 = \phi(y_0)$ *функция* $y = f(x)$ *имеет производную* $f'(x_0)$, *равную*

$$f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(y_0)}.$$

Пример. $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y \Rightarrow y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) Дифференцирование неявных функций.

Пусть есть неявная функция $F(x, y) = 0$ (т.е. ни одна из переменных явно не выражена через другую, например, – $x^2 + y^2 - 1 = 0$). Очевидно, что можно дифференцировать, выразив одну из переменных как функцию другой переменной. Однако дифференгцирование можно осуществить и без преобразования в явную функцию. Покажем на примере (подробнее во 2 семестре – в разделе о функциях 2-х переменных).

Пусть $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Дифференцируем обе части равенства, учитывая правила дифференцирования сложной функции $(y = y(x))$:

$2x + 2y \cdot y' - 0 = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow$ если надо явные выражения, то, выражая одну переменную через другую $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ и подставив в полученную формулу, имеем $y' = -\dfrac{x}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}}$.

5) Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость переменной y *и переменной* x *задана в параметрическом виде:* $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \le t \le t_\psi$. *Тогда* $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$.

Пример. $x = a\cos t, y = a\sin t, a < t \le \pi, y'_x = \dfrac{(a\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\dfrac{a\cos t}{a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$.

6) Логарифмическая производная

Пусть $y = f(x) > 0$ – некоторая функция. Образуем функцию $\ln y$ и вычислим ее производную $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, которая называется **логарифмической производной**.

Отношение $T_y = \dfrac{y'}{y}$ называется **темпом роста функции** или по-другому, **относительной скоростью изменением** функции $y = f(x)$.

Это понятие используется в экономической литературе. Также оно полезно при вычислении сложных (степенно-показательных или содержащих много сомножителей).

Пример. $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + \dfrac{x}{x} \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

7) Таблица производных простейших элементарных функций

Исходя из вышеизложенного, имеем следующую таблицу производных простейших функций:

1) $(c)' = 0, \quad (c - \text{const});$
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in R);$
3) $\left(a^x\right) = a^x \cdot \ln a \qquad \left(\left(e^x\right)' = e^x\right);$
4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \qquad \left((\ln x)' = \dfrac{1}{x}\right);$
5) $(\sin x)' = \cos x.$
6) $(\cos x)' = -\sin x;$
7) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$
8) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$
9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
11) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2};$
12) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Приведенные выше формулы производных вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правила дифференцирования сложной функции являются основными методами дифференцирования функции. С их помощью можно найти производную любой элементарной функции.

8) Производные высших порядков

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является дифференцируемой для $\forall\, x \in X$, то ее производная $y' = y'(x) = g(x)$, $x \in X$ является новой функцией $y = g(x)$ от переменной x и можно опять ставить вопрос о ее дифференцировании.

Производная от производной $y' = f'(x)$ называется второй производной и обозначается $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, … . Продолжая, если возможно, имеем $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

§ 3. Понятие дифференциала функции и его применение в приближенных вычислениях

Как мы уже отмечали ранее в замечании, функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где A – const, $o(\Delta x)$ – б.м.ф.

Определение. ***Дифференциалом функции*** *$y = f(x)$, $x \in X$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения Δy функции $y = f(x)$ в этой точке:*

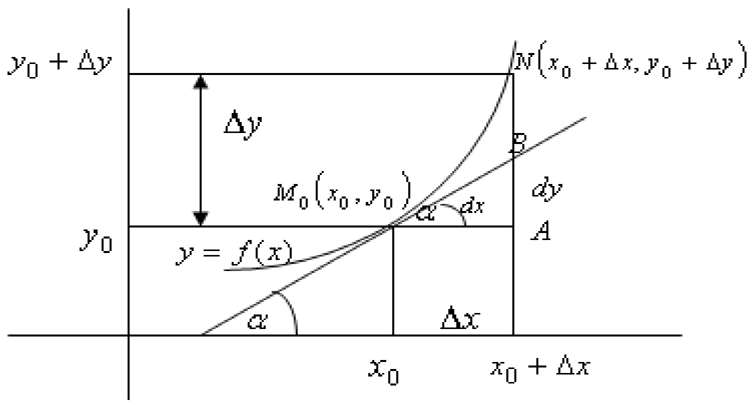
$$dy = A \cdot \Delta x .$$

Определение. *Любое приращение такое, что $x + \Delta x$ $x \in X$ принимается за дифференциал независимой переменной: $dx = \Delta x$.*

Напомним еще раз, что для функции одной переменной понятие дифференциала и существование производной эквиваленты. Поэтому

$$dy = y' \cdot dx = f'(x_0)\, dx .$$

Геометрический смысл дифференциала



$$AB = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy .$$

Отрезок AB – главная линейная относительно Δx часть приращения. Отрезок NB – соответствует величине более высокого порядка малости, чем Δx. Из предыдущего следует, что

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+0(\Delta x).$$

Отсюда получаем формулу для приближенных расчетов значений функции

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0) \text{ или } f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

§ 4. Применение производной в экономике

Уже упоминался физический смысл производной (мгновенная скорость точки) и геометрический смысл (тангенс угла наклона касательной).

В экономике широко используются средние величины: средняя стоимоть, средняя производительность, средний доход, средний объем продаж и т.д.

Если зависимость между двумя показателями y и x задана аналитически $y=f(x)$, то средняя величина представляет собой отношение $\frac{y}{x}$. (Часто средние значения определяются из обработки статистических данных и таблиц).

Однако при планировании экономической деятельности могут возникать и другие задачи. Например, требуется определить, на какую величину вырастет прибыль, если будут увеличены затраты, и, наоборот, насколько уменьшиться прибыль, если затраты сократятся. Использование средних величин не дает ответа на подобные задачи. Для нахождения адекватного решения в описанной задаче, надо найти предел отношения приращений рассматриваемых величин, т.е. надо изучать предельный эффект.

Экономический смысл производной заключается в выражении предельного эффекта влияния независимых факторов (независимой переменной x) на показатели экономической деятельности (зависимые переменные y). Применение дифференциального исчисления в экономике называется **предельным анализом**.

Для обозначения производных в экономической литературе часто пользуются специфической терминологией.

Если $k=k(x)-$издержки производства в зависимости от количества продукции x, то тогда отношение $\frac{k(x+\Delta x)-k(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta k(x)}{\Delta x}$ показывает среднее значение издержек на единицу Δx приращения количества продукции с x до $(x+\Delta x)$, а $k'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta k(x)}{\Delta x}$ называется **предельными издержками производства**.

Если $y = f(x)$ есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции y от затрат фактора x, то $f'(x)$ называют **предельным продуктом**.

Аналогично можно ввести предельную выручку $u'(x)$, где $u(x) -$ выручка от продажи x единиц товара. Ясно, что $u(x) = x \cdot Q(x) - S(x)$, где $Q(x) -$ цена единицы товара, $S(x) -$ себестоимость партии товара из x единиц.

Приведенное выше использование производной задает показатель абсолютного изменения функции. Однако в экономике широко применяют анализ относительных изменений, называемый еще вычислением **эластичности функций**. По-другому, во многих задачах требуется знать процент прироста (т.е. относительное приращение) зависимой переменной y, соответствующий 1% проценту прироста (тоже относительное приращение) независимой переменной x.

Определение. Эластичностью функции $y = f(x)$ *называется предел относительного приращения функции к относительному приращению аргумента функции, если приращение аргумента стремится к 0*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = x \cdot (\ln y)' = x \cdot T_y,$$

где $T_y = (\ln y)' -$ *темп изменения функции.*

Т.о., эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Эластичность позволяет измерять степень чуткости или чувствительности, например, потребителей к изменению цены продукции.

Пример. Найти эластичность спроса относительно цены, в предположении, что спрос q зависит от цены p, следующим образом: $q = -2p^2 + 3p + 8$. Требуется определить эластичность спроса при цене $p = 1$.

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot (-4p + 3) = \frac{+p(3 - 4p)}{-2p^2 + 3p + 8} = -\frac{p(3 - 4p)}{2p^2 - 3p - 8}\bigg|_{p=1} = -\frac{1}{9}.$$

Т.е. если цена увеличится на 1%, т.е. станет $p = 1{,}01$, то спрос уменьшится на $\frac{1}{9}\%$.

Глава IX. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши
Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)
Сравнение функций по скорости роста
Формулы Маклорена и Тейлора
Ряды Маклорена для элементарных функций

Теорема Ферма (о равенстве нулю производной)

Пусть функция $y = f(x)$*:*

1) дифференцируема на интервале (a;b)*,*

2) достигает экстремума в точке $x_0 \in (a;b)$.

Тогда производная в этой точке $f'(x_0) = 0$.

◀Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 принимает наибольшее значение при $x_0 \in (a;b)$. По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, причем предел не зависит от того, будет ли $x \to x_0$ справа или слева. Но при $x > x_0$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, откуда следует, что $f'(x_0) \le 0$. При $x < x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, следовательно, $f'(x_0) \ge 0$.

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, ее предел при $x \to x_0$ не должен зависеть от выбора направления приближения аргумента x к точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

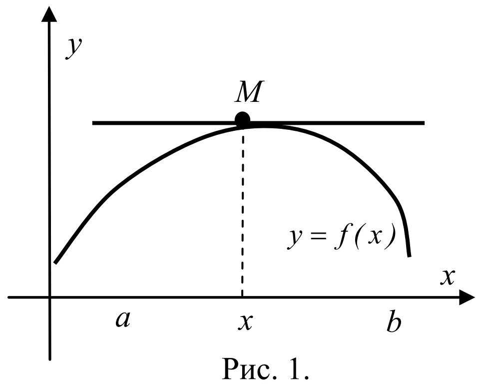


Рис. 1.

Получаем $\begin{cases} f'(x_0) \le 0 \\ f'(x_0) \ge 0 \end{cases}$, или $f'(x_0) = 0$. Аналогично рассматривается другой случай.►

Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: *в точке наибольшего или наименьшего значения касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

Теорема Ролля. (о производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения). *Пусть функция* $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке [a;b]*;*

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$*;*

3) на концах отрезка [a;b] *принимает равные значения:* $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ *найдется по крайней мере одна точка* x_0*, в которой* $f'(x_0) = 0$.

◀Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения. Пусть это будут значения *m* и *M.* Могут представиться два случая:

1) $\mathrm{M} = \mathrm{m}$. В этом случае $\mathrm{m} \le f(x) \le m$, функция $y = f(x)$ является постоянной на отрезке $[a;b]$. Поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале $(a;b)$, теорема верна.

2) $\mathrm{M} > \mathrm{m}$. Тогда для функции $y = f(x)$ даже в том крайнем случае, когда, например, наибольшее значение функции принимается на конце отрезка $f(a) = f(b) = M$, наименьшее значение будет приниматься уже внутри отрезка. Следовательно, найдется точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $f(x_0) = m$.

Но тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.►

Теорема Ролля имеет простой ***геометрический смысл:*** *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.*

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так:

между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.

Ж. Лагранж

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях).

Пусть функция $y = f(x)$*:*

1) непрерывна на отрезке [a;b]*;*

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ *найдется по крайней мере одна точка* x_0 *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

◀Введем вспомогательную функцию $L(x)$ на отрезке $[a;b]$, определив ее так:

$$L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция на $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

1) она непрерывна на $[a;b]$, поскольку непрерывны все слагаемые $L(x)$;

2) на $(a;b)$ функция $L(x)$ имеет производную;

3) $L(a) = L(b) = 0$.

Из теоремы Ролля следует, что существует точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $L'(x_0) = 0$. Следовательно, $L'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Отсюда $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $x_0 \in (a;b)$.▶

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент хорды *AB*, а $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис.2). Утверждение теоремы Лагранжа сводится к следующему:

на кривой $y = f(x)$ точка $M(x_0; f(x_0))$ такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде AB.

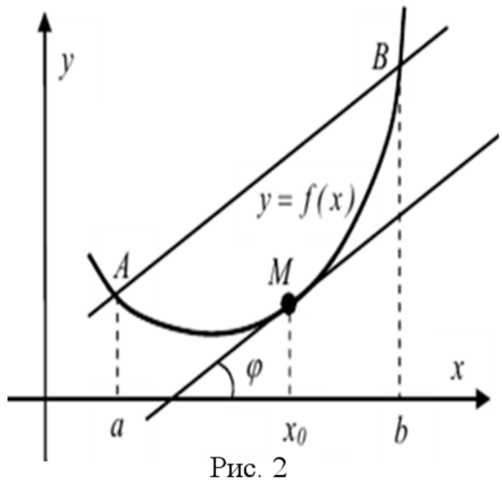


Рис. 2

Доказанная формула называется ***формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.*** Она может быть переписана в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a).$$

Теорема Коши (об отношении приращений двух функций).

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

3) производная $g'(x) \neq 0$ на интервале $(a;b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ найдется по крайней мере одна точка x_0 такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

О. Коши

◀Из условия теоремы следует, что $g'(x) \neq 0$. Это означает, что разность $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если бы $g(b) - g(a) = 0$, то функция $y = g(x)$, являясь непрерывной и дифференцируемой, удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и в таком случае $g'(x)$ была бы равна нулю по крайней мере в одной точке x_0 интервала $(a;b)$, что противоречит условию. Введем вспомогательную функцию

$$K(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) $K(x)$ непрерывна на отрезке [a;b], так как непрерывны функции $y=f(x)$ и $y=g\left(x\right)$;

2) функция *K(x)* имеет производную всюду в интервале $(a;b)$, поскольку каждое слагаемое в правой части функции *K(x)* имеет производную на этом интервале;

3) $K(a)=K(b)=0$, в чем убеждаемся непосредственной проверкой.

Из теоремы Ролля делаем вывод о существовании точки x_0, что $K'(x_0)=0$.

Поэтому $K'(x_0)=f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0$.

Отсюда следует $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.►

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: достаточно в теореме Коши взять $g(x)=x$.

Теорема (правило Лопиталя) (нахождения предела отношения функций через предел отношения их производных).

Пусть функции $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$

1) дифференцируемы в окрестности точки a*, кроме, быть может, самой точки* a*;*

2) $g(x)\neq 0$ *и* $g'(x)\neq 0$ *в этой окрестности;*

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$*,* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$*;*

4) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный)*

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$*, причем* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

◄В теореме ничего не сказано о значениях $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке $x=a$. Положим $f(a)=g(a)=0$. Так как теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$, то функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ будут непрерывны в точке *a*. Поэтому на отрезке $[a;x]$, где *x* - какая угодно точка окрестности точки *a*, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, между a и x найдется по крайней мере одна точка x_0 такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Величина x_0 зависит от x, причем при $x \to a$ точка x_0 также будет стремиться к a (см. рис. 3).

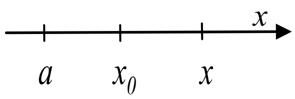


Рис. 3

Поэтому $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Из последних двух соотношений следует, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.▶

Последнее равенство выражает **правило Лопиталя**, по которому вычисление предела отношения двух функций может быть заменено при выполнении условий теоремы вычислением предела отношения производных этих функций.

Это один из наиболее мощных методов нахождения пределов.

Замечание 1. Правило Лопиталя распространяется на случай неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to a$, поскольку можно доказать теорему Лопиталя при условии $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0$.

Замечание 2. Правило Лопиталя распространяется на случай $x \to \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену $x = 1/t$ и воспользоваться результатом теоремы.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = 3 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Замечание 3. Иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз (делать несколько шагов), если от неопределенности не удается избавиться на первом шаге. Однако условия теоремы на каждом шаге должны оставаться справедливыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{5x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{20x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{60x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{120}=+\infty$$

Замечание 4. Хотя правило Лопиталя работает только с неопределенностями $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, неопределенности других типов могут быть раскрыты с помощью этого правила, если путем преобразований удастся привести изучаемую неопределенность к типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{a}{x}\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{a}{x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=a\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a$$

Сравнение функций по скорости роста

Рассмотрим некоторые функции, возрастающие при $x\to+\infty$. Составим из них ряд

$$y=\log_a x,\ a>1;\quad y=x^k,\ k>0;\quad y=a^x,\ a>1;\quad y=x!;\quad y=x^x$$

и докажем, что чем правее в ряду находится функция, тем быстрее она растет. Найдем пределы отношения во всех парах рядом стоящих функций при $x\to+\infty$.

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\left[\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln a}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{kx^k}=0,$$

следовательно, функция $y=x^k,\ k>0$, растет быстрее при $x\to+\infty$, чем $y=\log_a x,\ a>1$.

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\left[\begin{matrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}.$$

Для любого $k>1$, в том числе и сколь угодно большого, справедливо неравенство $n\text{-}1<k\le n$, где n – натуральное число. Применив правило Лопиталя *n* раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)...(k-n+1)}{a^x\cdot\ln^n a\cdot x^{n-k}},$$

где величина $n-k>0$. Числитель дроби – постоянное число, знаменатель неограниченно возрастает, предел этой дроби равен нулю. Итак, функция $y=a^x,\ a>1$ растет быстрее при $x\to+\infty$, чем $y=x^k,\ \ \mathrm{k}>0$.

3) Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}$. Аналогично случаю 2) для любого $a>1$ верно неравенство $n<a\le n+1$. Запишем дробь следующим образом

$$\frac{a^x}{x!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}...\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n+1}...\frac{a}{x}<\frac{a^n}{n!}\cdot\left(\frac{a}{n+1}\right)^{x-n},$$

где произведение последних правильных $(x-n)$ дробей заменено на наибольшую из них в степени $x-n$.

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{a}{n+1}\right)^{x-n}=\dfrac{a^n}{n!}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{n+1}\right)^{x-n}=0$, так как $\dfrac{a}{n+1}<1$.

С другой стороны, отношение $\dfrac{a^x}{x!}$ не может быть отрицательным. Итак, предел рассматриваемого отношения функций ограничен сверху нулем и не может быть меньше нуля. Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x!}=0$.

4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x!}{x^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2}{x}\cdot\ ...\ \cdot\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\cdot\ ...\ \cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}.$$

Первый из этих пределов $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Величина всех остальных пределов заключена между нулем и единицей. Следовательно, произведение этих пределов есть нуль. Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x!}{x^x}=0$. Функция $y=x^x$ самая быстрорастущая из перечисленных функций при $x\to+\infty$.

Формулы Маклорена и Тейлора

Б. Тейлор

Эти формулы являются одними из основных формул математического анализа и имеют многочисленные приложения.

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

Его можно представить в виде суммы степеней переменной *x,* взятых с некоторыми коэффициентами. Продифференцируем его *n* раз по *x,* найдем значения многочлена и его производных в точке $x=0$, выразим из каждого полученного выражения коэффициенты $a_0, a_1, ... a_n$, разместив результаты в трех столбцах соответственно:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$	$P(0)=a_0$	$a_0=P(0)$
$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2...+na_nx^{n-1}$	$P'(0)=a_1$	$a_1=\dfrac{P'(0)}{1!}$
$P''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3x...+n\cdot(n-1)\cdot a_nx^{n-2}$	$P''(0)=2\cdot 1\cdot a_2$	$a_2=\dfrac{P''(0)}{2!}$
$P'''(x)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3...+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_nx^{n-3}$	$P'''(0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3$	$a_3=\dfrac{P'''(0)}{3!}$
……..	……..	

Вернемся к нашему многочлену, подставив вместо его коэффициентов $a_0, a_1, ... a_n$ выражения из 3-го столбца. Получим

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\frac{P'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Это *формула Маклорена* для многочлена $P(x)$ степени *n*. Рассуждая аналогичным образом, можно разложить многочлен $P(x)$ по степеням разности $(x-a)$, где a – любое число.

Будем иметь

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Это выражение называется *формулой Тейлора* для многочлена $P(x)$, или разложением многочлена $P(x)$ по степеням $(x-a)$.

Пусть теперь в окрестности точки $x=0$ задана функция $y=f(x)$, не являющаяся многочленом, но имеющая в этой окрестности производные до n-го порядка включительно.

Вычислим величины $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ ...,f^{(n)}(0)$ и зададим функцию

$$Q_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$Q_n(x)$ есть многочлен степени n. Он называется *приближающим многочленом* для функции $y=f(x)$. Если бы исходная функция $y=f(x)$ являлась многочленом степени *n*, то выполнялось бы тождество $f(x)\equiv Q_n(x)$ для всех значений *x* из рассматриваемой окрестности. Поскольку это не так, положим

$$f(x)=Q_n(x)+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом. В курсе математического анализа доказывается, что $R_n(x) = o(x^n)$.

Тогда формула разложения функции $f(x)$ в ряд по степеням *x* принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Эту формулу называют формулой Маклорена разложения функции $f(x)$ по степеням x *с остаточным членом в форме Пеано*. Для остаточного члена получены выражения, позволяющие дать оценку его величине. Данная формула показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ приближающим многочленом *n*-й степени, мы совершим ошибку, которая при $x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^n.

Проводя аналогичные рассуждения при разложении функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, получим формулу Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Отсюда вывод: *поведение любой n раз дифференцируемой функции в окрестности точки $x = a$ (в частности, $x = 0$) можно описать многочленом достаточно точно, а при $n \to +\infty$ – со сколь угодно высокой степенью точности.*

Разложение в ряд Маклорена элементарных функций

Хотя формула Маклорена есть частный случай формулы Тейлора, в наших приложениях именно формула Маклорена будет определяющей. Формула Тейлора может быть приведена к формуле Маклорена подстановкой $x - a = y$.

Разложим в ряд Маклорена элементарные функции:

$$e^{x,}; \quad \sin x; \quad \cos x; \quad \ln(1+x), x > -1; \quad (1+x)^{\alpha}, x > -1.$$

С этой целью составим таблицу производных этих функций и значений производных в точке $x = 0$.

$f(x)$	$f(0)$	$f'(x)$	$f'(0)$	$f''(x)$	$f''(0)$	$f'''(x)$	$f'''(0)$
e^x	1	e^x	1	e^x	1	e^x	1
$\ln(1+x)$	0	$\frac{1}{1+x}$	1	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1	$\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$	2!

Подставляя в формулу Маклорена значения производных, взятые из четных столбцов таблицы, получим разложения в ряд для каждой функции

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\Big((x)^3\Big).$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + o\Big((x^4)\Big) = x - \frac{x^3}{3!} + o\Big((x^4)\Big).$$

$$\cos x = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + o\Big((x^5)\Big) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\Big((x^5)\Big)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\Big((x^3)\Big).$$

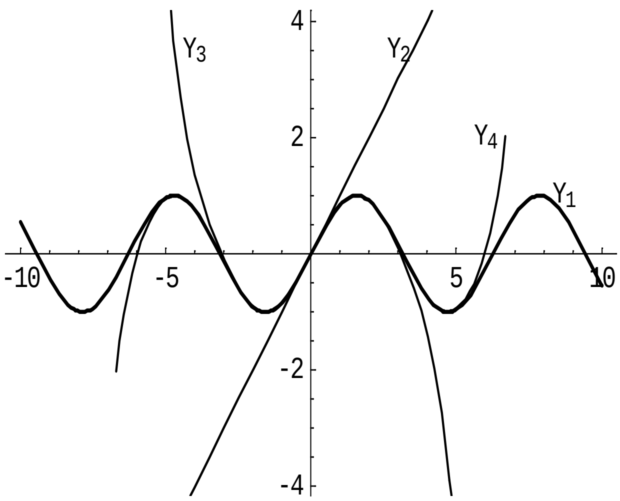
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o\Big((x^2)\Big)$$

Замечание 1. Анализируя ряд разложения функции, легко заметить закономерности образования ряда и выписать следующие члены разложения.

Пример 5. Разложить по формуле Маклорена функцию $\sin x$.

Решение. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots$

На рисунке изображен жирной линией график функции $Y_1 = \sin x$, тонкими линиями его приближение одним членом ряда Маклорена $Y_2 = x$, приближение четырьмя отличными от нуля членами ряда $Y_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ и, наконец, приближение семью членами ряда



$$Y_4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}.$$

Замечание 2. Эти формулы дают возможность производить разложения в ряд некоторых функций без использования общей схемы с нахождением производных высокого порядка.

Пример 6. Разложить по формуле Маклорена функцию e^{2x+1} до $o\left((x^4)\right)$.

Решение. Разложим функцию e^{2x+1} в окрестности $x=0$ до $o\left((x^4)\right)$. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд, заменив в правой части этого ряда величину x на $2x$:

$$e^{2x+1} = e^1\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+o\left((x^4)\right)\right]=$$

$$e\left[1+2x+2x^2+\frac{9}{2}x^3+o\left((x^4)\right)\right]=e+2ex+2ex^2+\frac{9}{2}ex^3+o\left((x^4)\right)$$

Замечание 3. Ранее мы установили асимптотические формулы для некоторых элементарных функций, например, $\sin x = x + o(x)$. Мы пользовались ими при вычислении простейших пределов. Для нахождения некоторых более сложных пределов такого асимптотического приближения может оказаться недостаточно и следует брать следующие члены разложения.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Если ограничиться разложением $\sin x = x + o(x)$, то в пределе получается выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+o(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot o(1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(1)}{x^2}.$$

Чему равен такой предел, сказать невозможно. Неизвестно, какая бесконечно малая функция скрывается под $o(1)$. Поэтому правильное решение выглядит так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3!}+o(x)\right)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Замечание 4. Если в разложении для функции $(1+x)^\alpha$ положить $\alpha = n$, где n - натуральное число, то все члены этой формулы начиная с (n+1)-го исчезают, и формула Маклорена превращается в известную формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n,$$

т.е. бином Ньютона является частным случаем разложения функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать и доказать теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
2. В чем геометрический смысл теоремы Ролля?
3. Привести геометрический смысл теоремы Лагранжа.
4. Как в смысле общности соотносятся между собой теоремы Роля, Лагранжа и Коши?
5. Сформулировать и доказать правило Лопиталя при $x \to a$.
6. Можно ли распространить правило Лопиталя на случай $x \to +\infty$? Как это обосновать?
7. На какие типы неопределенностей распространяется правило Лопиталя?
8. Провести сравнение степенной, показательной и логарифмической функций по скорости роста при $x \to +\infty$.
9. Назвать наиболее медленно растущую функцию из известных вам и наиболее быстро растущую при $x \to +\infty$.
10. Привести разложение многочлена n-й степени в ряд, используя формулу Маклорена.
11. Привести в общем виде формулы Тейлора и Маклорена разложения функции в степенной ряд.
12. Получить разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
13. Как соотносятся между собой асимптотические формулы и формула Маклорена разложения функции в степенной ряд?

Глава X. Исследование функций с помощью производных

- Условия возрастания и убывания функции
- Понятие экстремума
- Необходимое условие экстремума
- Первое достаточное условие экстремума
- Схема исследования функции на экстремум
- Второе достаточное условие экстремума
- Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке
- Выпуклость функции. Точки перегиба
- Схема исследования функции на выпуклость
- Асимптоты графика функции
- Исследование функций и построение их графиков
- Приложение. Эластичность функции

Условия возрастания и убывания функции

Изучим условия возрастания (не убывания) и убывания (не возрастания) функций. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на промежутке*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е. из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция называется *убывающей* на промежутке, если из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей на промежутке*, если из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$, и *невозрастающей*, если из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Теорема 1. (условия возрастания (убывания) монотонной функции).
Если $f'(x) > 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом промежутке, если $f'(x) < 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.

◄Для функции $y = f(x)$ выполняются условия теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1; x_2] \in X$, поэтому существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1)$. Анализируем это равенство: если $f'(x_0) > 0$, то из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ и обратно. Если же $f'(x_0) < 0$, то из $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.►

Замечание 1. Обратное утверждение звучит несколько иначе. Если функция возрастает на промежутке, то $f'(x_0) \geq 0$ или не существует.

Пример 1. Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси, соответственно $f'(x) > 0$, но в точке $x = 0$ производная $f'(0) = 0$.

Пример 2. Функция $y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ не имеет производной в точке x=0 (левая и правая производная различны), однако она возрастает при всех значениях x, в том числе и в точке $x = 0$.

Замечание 2. Опираясь на более «мягкие» условия, можно сформулировать прямую теорему: если производная функции, непрерывной на промежутке, неотрицательна, то функция на этом промежутке не убывает. Тогда прямая и обратная теоремы на формализованном языке звучат так:

для того, чтобы непрерывная на промежутке функция $y = f(x)$ была неубывающей на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) \geq 0$.

Понятие экстремума

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \leq f(x_0)$.*

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$.*

Значение функции в точке максимума называется локальным максимумом, значение функции в точке минимума - локальным минимумом данной функции. Максимум и минимум функции называются ее локальными *экстремумами* (extremum – крайний).

Определение. *Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если для всех x из окрестности точки x_0 верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$).*

Замечание. В приведенном определении локального экстремума мы не предполагаем непрерывности функции в точке x_0.

Пример 3. Функция $y = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ разрывна в точке $x = 0$, но имеет в этой точке максимум, поскольку существует окрестность точки $x = 0$, в которой $f(x) < f(x_0)$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке называется *глобальным экстремумом.* Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на концах отрезка.

Необходимое условие экстремума

Теорема 2. (о необходимом условии экстремума).

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная $f'(x_0)$ в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

◄Если в точке x_0 функция имеет экстремум и дифференцируема, то в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Ферма, следовательно, производная функции в этой точке равна нулю.

Но функция $y = f(x)$ может иметь экстремум и не быть дифференцируемой в этой точке. Достаточно указать пример. Примером может служить функция $y = |x|$, которая имеет минимум в точке $x = 0$, однако не дифференцируема в этой точке. ►

Замечание 1. Геометрическую иллюстрацию теоремы дает Рис.1. Функция $y = f(x)$, график которой представлен на этом рисунке, имеет экстремумы в точках x_1, x_3, x_4, при этом в точке x_1 производная не существует, в точке x_3 она равна нулю, в точке x_4 обращается в бесконечность. В точках x_2, x_5 функция экстремума не имеет, причем в точке x_2 производная обращается в бесконечность, в точке x_5 производная равна нулю.

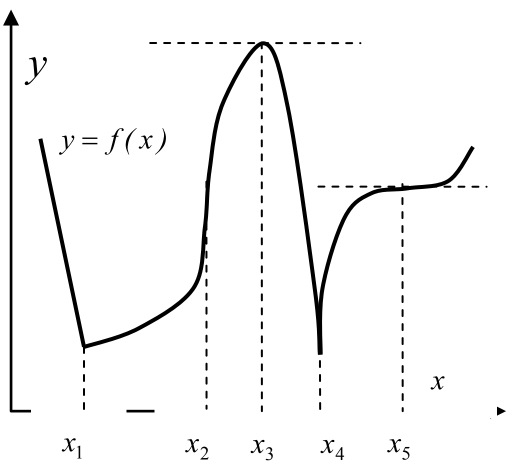


Рис. 1

Замечание 2. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются ***критическими точками*** этой функции. Они определяются из уравнения $f'(x) = 0$ (*стационарные точки*) или $f'(x) = \infty$.

Замечание 3. Не в каждой своей критической точке функция обязательно имеет максимум или минимум.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Критической для этой функции является точка $x = 0$, что следует из уравнения $f'(x) = 3x^2 = 0$. Однако эта функция при всех x является возрастающей и экстремума не имеет.

Теорема 3. (о достаточных условиях экстремума).

Пусть для $y = f(x)$ *выполнены следующие условия:*

1) $y = f(x)$ *непрерывна в окрестности точки* x_0*;*

2) $f'(x) = 0$ *или* $f'(x) = \infty$ *в точке* x_0*;*

3) $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *меняет свой знак.*

Тогда в точке $x = x_0$ *функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум:*

минимум*, если при переходе через точку* x_0 *производная меняет свой знак с минуса на плюс;*

максимум*, если при переходе через точку* x_0 *производная меняет свой знак с плюса на минус.*

Если производная $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *не меняет своего знака, экстремума в точке* $x = x_0$ *нет.* ◄

Условия теоремы можно свести в следующую таблицу

Знак производной		Экстремум
-	+	Минимум
+	-	Максимум
-	-	Нет
+	+	Нет

Так как по условию $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, то на левом относительно точки x_0 интервале функция $y = f(x)$ убывает. Так как $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то на правом относительно точки x_0 интервале функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x_0)$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, а это означает, что $f(x_0)$ есть локальный минимум функции $f(x)$. Если при переходе с левого интервала на правый функция продолжает убывать, то в точке x_0 не будет достигаться минимальное значение функции (экстремума нет).

Аналогично доказывается существование максимума.►

На рис. 2 a-h представлены возможные случаи наличия или отсутствия экстремума непрерывной функции, производная которой в критической точке равна нулю или обращается в бесконечность.

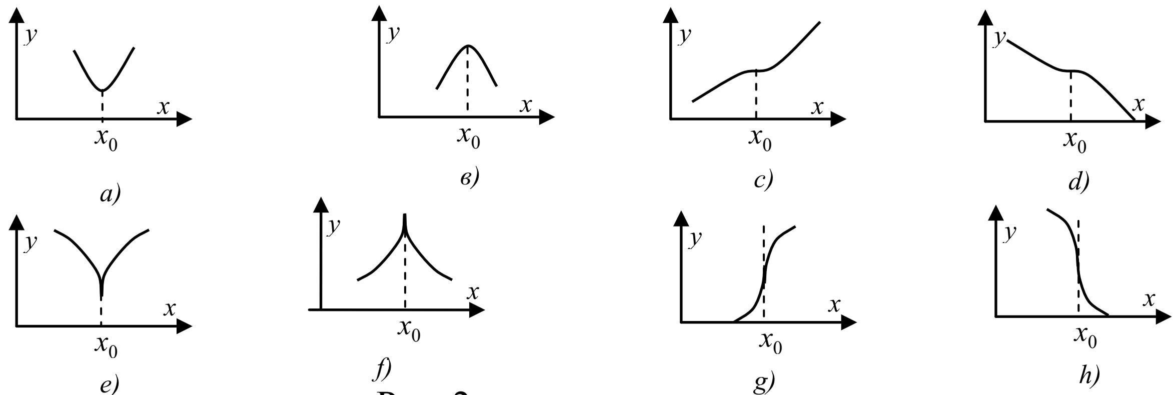


Рис. 2

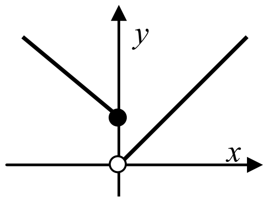


Рис. 3

Замечание. Если условие непрерывности функции в самой точке x_0 не выполнено, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Пример 5.

Рассмотрим разрывную в точке x_0 функцию $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le 0,\\ x, & x>0\end{cases}$ (рис.3). Производная этой функции меняет знак при переходе через точку $x_0=0$, однако функция в точке $x_0=0$ экстремума не имеет.

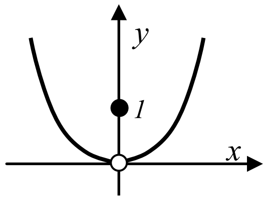


Рис. 4

Пример 6. Пусть дана функция

$f(x)=\begin{cases}x^2, x\ne 0,\\ 1, \quad x=0\end{cases}$ (рис.4). Как видно из рисунка, $f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0=0$, однако функция имеет разрыв в точке $x_0=0$.

Замечание 3. Если функция имеет в точке x_0 экстремум, например, минимум, то необязательно слева от точки x_0 функция монотонно убывает, а справа от x_0 монотонно возрастает.

Пример 7. Пусть дана функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(2-\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases} \text{ (рис. 5).}$$

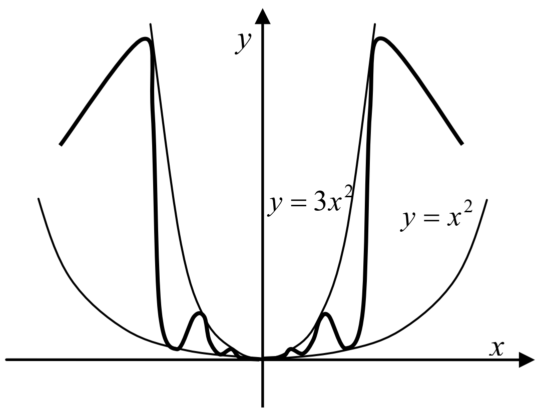


Рис. 5

Можно показать, что в точке $x=0$ данная функция непрерывна и имеет минимум. Производная функции

$f'(x)=2x\left(2-\cos\dfrac{1}{x}\right)-\sin\dfrac{1}{x}$ в любой окрестности точки $x=0$ меняет знак бесконечно много раз. Поэтому функция $f(x)$ не является монотонно убывающей или возрастающей ни слева, ни справа от точки $x=0$.

Схема исследования функции на экстремум:

1) найти производную $f'(x)$;

2) найти критические точки, т.е. такие значения *x*, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)=\infty$;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической

точки. Если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум Если при переходе x через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ не меняется, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума;

4) найти значения функции в экстремальных точках.

Теорема 4. (2 -ое достаточное условие экстремума).
Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1. $y = f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0,
2. $f'(x) = 0$ в точке x_0
3. $f''(x) \neq 0$ в точке x_0.

Тогда, в точке x_0 достигается экстремум, причем: если $f''(x_0) > 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет минимум, если $f''(x_0) < 0$, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум.

◄ По определению 2-й производной $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$.

Но по условию $f'(x_0) = 0$. Поэтому $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$. Если $f''(x_0) > 0$, то дробь $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$. При $x < x_0$ дробь положительна, если $f'(x) < 0$. При $x > x_0$ дробь положительна, при условии $f'(x) > 0$. Следовательно, $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_0$ меняет знак, поэтому есть экстремум. Знак производной меняется с минуса на плюс, значит, это минимум. Аналогично доказывается случай $f''(x_0) < 0$.►

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 + 2x + 3$.

Находим производную $y' = 2x + 2$.

1) Находим критические точки, для чего приравниваем к нулю производную: $y' = 2x + 2 = 0$, $\to$ $x_0 = -1$.

2) Изучаем знак производной слева и справа от этой точки (рис. 6). Поскольку знак производной меняется с минуса на плюс, в точке $x = -1$ достигается минимум.

3) Находим величину минимума: $y_{\min}(-1) = 2$.

Пример 9.

Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$.

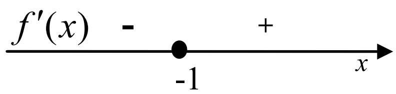


Рис. 6

1) Находим производную $y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

2) Критической точкой является $x = 0$, т.к. в этой точке $f'(0) = \infty$.

3) Исследуем знак y' слева и справа от точки $x = 0$. Очевидно, $f'(x) < 0$, если $x < x_0$, и $f'(x) > 0$, если $x > x_0$. Таким образом, точка $x = 0$ есть точка минимума данной функции.

4) $y_{\min}(0) = 1$.

Пример 10.

Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

1) Находим первую производную: $y' = -2xe^{-x^2}$.

2) Приравнивая производную нулю, находим единственную критическую точку $x = 0$.

3) Далее находим вторую производную: $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Ее значение в точке $x = 0$ равно -2.

4) Делаем вывод о наличии максимума функции и вычисляем: $y_{\max}(0) = 1$.

Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то, согласно 2-й теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во ***внутренней точке*** x_0 отрезка $[a; b]$, то $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, т. к. в этом случае существует окрестность точки x_0 такая, что значения $f(x)$ для всех точек x из этой окрестности будут не больше $f(x_0)$.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ ***может принимать и на концах отрезка*** $[a; b]$. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции в интервале $(a; b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ и выбрать среди них наибольшее число. Вместо исследования на максимум можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках. Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ будет наименьшее число среди всех минимумов функции $f(x)$ в интервале $(a; b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение. *График функции* $y = f(x)$, *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$, *имеет на этом интервале выпуклость, направленную вверх (вниз), если график этой функции в пределах интервала (a;b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной (рис. 7).*

Теорема 5. (об условиях выпуклости вверх или вниз).

Пусть функция $y = f(x)$ *определена на интервале* $(a;b)$ *и имеет непрерывную, не равную нулю в точке* $x_0 \in (a;b)$ *вторую производную. Тогда, если* $f''(x) > 0$ *всюду на интервале* $(a;b)$, *то функция имеет выпуклость вниз на этом интервале, если* $f''(x) < 0$, *то функция выпукла вверх.*

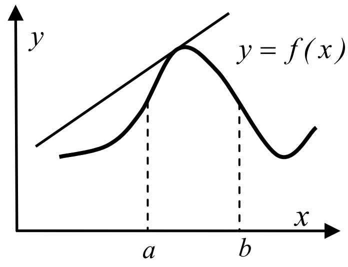


Рис. 7

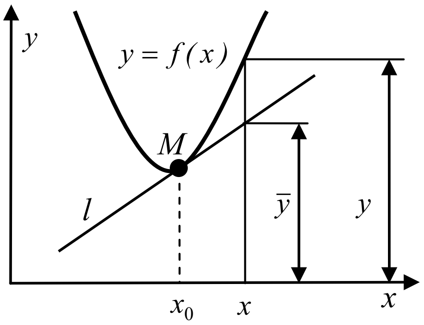


Рис. 8

◄Пусть в точке $M(x_0, f(x_0))$ (рис. 8) прямая l касается кривой $y = f(x)$. Обозначим через $\bar{y}$ переменную ординату точки прямой l. Тогда уравнение прямой l, касательной к кривой $y = f(x)$, имеет вид:

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Функцию $y = f(x)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Возьмем произвольное значение x из окрестности точки x_0 и найдем разность $y - \bar{y}$

$$y - \bar{y} = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right).$$

Заменим функцию $y = f(x)$ рядом Тейлора. Получим:

$$y - \bar{y} = \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \right) -$$
$$-\left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \right)$$

После раскрытия скобок будем иметь

$$y - \bar{y} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

В полученном выражении первое слагаемое в правой части определяет величину и знак разности $y - \bar{y}$, второе слагаемое является бесконечно малой величиной.

Из равенства следует, что знак разности $y - \bar{y}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$. Поэтому, если $f''(x_0) > 0$, то $y - \bar{y} > 0$ для всех точек $x \neq x_0$, достаточно близких к точке x_0. Точки кривой расположены выше своей касательной и, в соответствии с определением, кривая выпукла вниз. Если $f''(x_0) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$. Точки кривой расположены ниже своей касательной и кривая выпукла вверх.►

Определение. Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M\big(x_1, f(x_1)\big)$, разделяющая промежутки выпуклости вверх и вниз. Иными словами, точка $M\big(x_1, f(x_1)\big)$ - точка перегиба кривой, если в этой точке кривая переходит с одной стороны касательной на другую, меняя направление выпуклости (рис. 9).

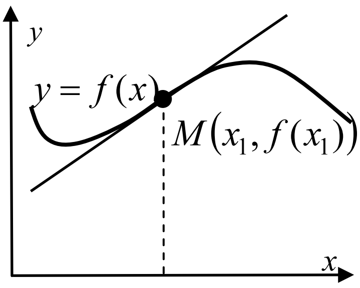


Рис. .9

Теорема 6. (о необходимом условии точки перегиба).

Если $M\big(x_1, f(x_1)\big)$ *есть точка перегиба дважды дифференцируемой функции* $y = f(x)$, *то* $f''(x_1) = 0$ *или* $f''(x_1) = \infty$.

Теорема 7. (о достаточном условии точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ *дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку* x_1 *меняет знак, причем* $f''(x_1) = 0$, *то точка* $M\big(x_1, f(x_1)\big)$ *есть точка перегиба кривой* $y = f(x)$.

Схема исследования функции на выпуклость

1) Найти вторую производную функции;

2) найти точки, в которых вторая производная равна нулю или обращается в бесконечность;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба;

4) найти значения функции в точках перегиба.

Пример 11. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Находим вторую производную:

$y' = 3x^2 - 6x + 1$, $y'' = 6x - 6$.

Находим точку, где вторая производная равна нулю: $y'' = 0$ при x=1.

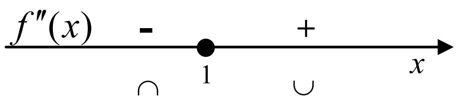


Рис. 10

Исследуем знак второй производной слева и справа от найденной точки. Для этого рисуем числовую ось и указываем на ней знаки второй производной (рис.10). Делаем заключение об интервале выпуклости вверх слева от точки x=1 и интервале выпуклости вниз справа от этой точки.

Делаем вывод о наличии перегиба в точке (1;2).

Асимптоты графика функции

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = y_0$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ равно b.

График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx - b \right) = 0,$$

т.е. когда функция при $x \to \infty$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

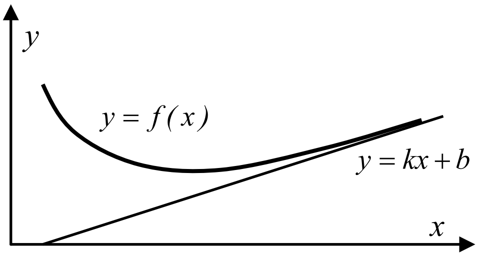


Рис. 11

Существование асимптоты $y = kx + b$ у кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$ означает, что при $x \to \infty$ функция ведет себя «почти как линейная», т. е. отличается от линейной функции $y = kx + b$ бесконечно мало (рис. 11). Наклонная асимптота может быть как правой, так и левой.

Теорема 8. (об условиях существования наклонной асимптоты)
Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \ \text{ и } \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = b,$$

то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

◄Из существования первого предела следует, что $\dfrac{f(x)}{x} - k = \beta(x)$, где $\beta(x)$ - бесконечно малая функция. Тогда $f(x) = kx + x \cdot \beta(x)$. Отнимем от обеих частей величину kx и найдем предел при $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\beta(x)$.

Из $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$ следует $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\beta(x)=b$. Поэтому $x\cdot\beta(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.

Следовательно, $f(x)=kx+x\cdot\beta(x)=kx+b+\alpha(x)$.▶

Пример 12. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{x(x-2)}$.

Решение. Найдем последовательно пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Второй предел находится при условии, что первый из них конечен.

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}.$$

Если $x>0$, то модуль раскрываем со знаком плюс, и получаем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}}=1.$$

Если $x<0$, то $$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=-1.$$

Найдем величину второго предела, домножив числитель и знаменатель (который равен единице) на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-2)-x^2}{\sqrt{x(x-2)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=-1$$

Таким образом, правая наклонная асимптота имеет вид $y=x-1$.

Аналогично рассматривается случай $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-2)-x^2}{\sqrt{x(x-2)}-x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=1$$

Тогда получим левую наклонную асимптоту $y=-x+1$. График исходной функции со своими асимптотами представлен на рис. 12.

Значительно короче можно решить пример, используя «o»-малое.

$$y=\sqrt{x(x-2)}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=|x|\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $x\to\infty$, заменим скобку асимптотическим равенством. Получим

$$y=|x|\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=|x|\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=|x|-\frac{|x|}{x}+o(1).$$

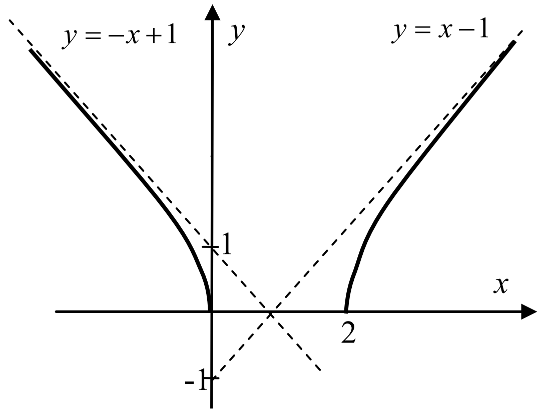


Рис. 12

Пусть $x\to+\infty$.

Тогда $y=|x|-\frac{|x|}{x}+o(1)=x-1+o(1)$.

Пусть $x\to-\infty$. Тогда $y=|x|-\frac{|x|}{x}+o(1)=-x+1+o(1)$.

Как известно, $o(1)$ есть бесконечно малая величина. Правая $y=x-1$ и левая $y=-x+1$ наклонные асимптоты получены.

Замечание 1. Прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x=x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Замечание 2. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при k=0.

Замечание 3. Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, то функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание 4. Кривая $y=f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем многократно.

Исследование функций и построение их графиков

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Построение сразу по точкам, за исключением элементарных случаев, *может привести к потере* на графике важных свойств функции. Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика представлена ниже.

1. Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.

2. Симметрия и периодичность.

3. Точки разрыва и промежутки непрерывности функции.

4. Нули функции и промежутки постоянного знака.

5. Экстремумы и промежутки монотонности.

6. Точки перегиба и промежутки выпуклости.

7. Асимптоты.

Замечание 1. Схема представлена как примерная. Пункты исследования можно опускать, если они дают банальную информацию, или переставлять, если обнаруживаются интересные особенности поведения графика. Однако без нахождения разрывов, экстремумов, асимптот и исследования на выпуклость часто невозможно получить график, правильно отражающий поведение функции.

Замечание2. Для уточнения графика можно найти некоторые дополнительные точки, но иногда удается обойтись и без них.

Замечание 3. Рекомендуется строить график одновременно с исследованием функции, нанося на координатную плоскость информацию по завершении каждого пункта исследования.

Пример 13. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и построить график.

1. Областью определения является вся числовая ось.

2. Функция четная: $f(-x) = f(x)$, так что ее график симметричен относительно оси ординат. Из четности функции следует, что достаточно построить ее график в правой полуплоскости, а затем отразить его в левую полуплоскость.

3. Точек разрыва нет, функция непрерывная на всей числовой оси.

4. При $x = 0$ имеем $y = 1$. Функция положительна при всех *x*, так что график функции лежит в верхней полуплоскости.

5. $y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Функция возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$. Точка $x = 0$ – критическая. При переходе *x* через точку $x = 0$ производная $y'(x)$ меняет знак с плюса на минус (рис.13). Следовательно, точка $x = 0$ – точка максимума, $y(0) = 1$.

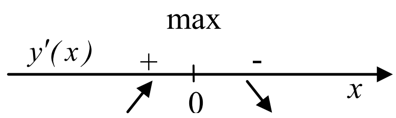


Рис. 13

6. $y'' = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$. Вторая производная обращается в нуль в точках $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Исследуем точку $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. При $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ имеем y'' >0, т.е. кривая выпукла

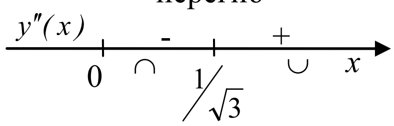


Рис. 14

вниз; при $x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $y''<0$ (кривая выпукла вверх) (рис.14).

Следовательно, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ - точка перегиба

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, наклонных асимптот нет.

Строим график в правой полуплоскости и симметрично отражаем его в левую полуплоскость. График функции изображен на рис. 15.

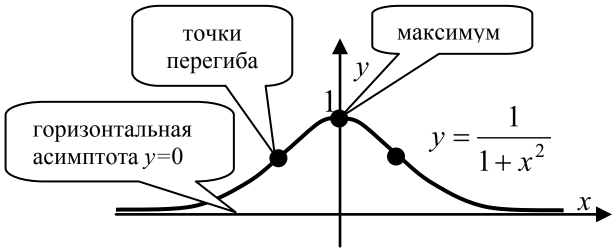


Рис. 15

Пример 14. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ и построить график.

1. Область определения функции $x\neq 1$, т.е. $D(y)=(-\infty,\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

Так как при $x<-1$ $y<0$, а при $x>-1$ $y>0$, и $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$, то множество значений функции $E\big(y\big)=(-\infty;\,+\infty)$.

2. Функция $y\big(x\big)$ не является периодической. Она ни четная, ни нечетная, т.е. ее график не обладает симметрией. (Этот очевидный для данной функции пункт можно было опустить).

3. В точке x=1 функция имеет разрыв второго рода, т.к. $\lim\limits_{x\to1-0}y(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to1+0}y(x)=+\infty$.

4. Точки пересечения с осями координат: $x=0,\quad y=1,$ и $x=-1,\ y=0$. Промежутки постоянного знака представлены на рис. 16.

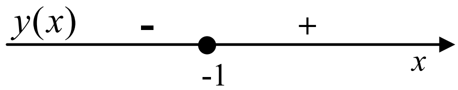


Рис. 16

5. Найдем интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции. Для этого вычислим первую производную:

$$y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Отсюда получим

а) $y'>0$ при $x<1$ и $x>5$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает, а при $x\in(1,5)$ $y'<0$ и функция убывает. (рис. 17).

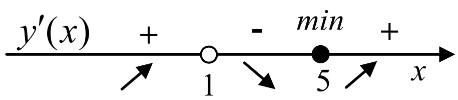


Рис. 17

б) $y'=0$ при x=5 и в точке (5; 27/2) функция имеет локальный минимум. Точка $x=-1$ тоже является критической точкой $y'(-1)=0$, но локального экстремума функции в этой точке нет.

6. Найдем интервалы выпуклости функции. Для этого вычислим вторую производную: $y''==\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Тогда $y''<0$ при $x<-1$ и функция выпукла вверх, а на промежутках $-1<x<1$ и $x>1$ $y''>0$ и функция выпукла вниз. Точка $(-1,\,0)$ - точка перегиба графика функции (рис. 18).

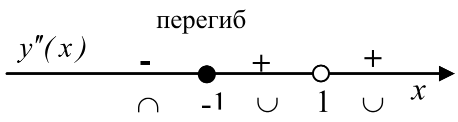


Рис. 18.

7. Прямая x=1 будет вертикальной асимптотой графика функции. Наклонными асимптотами графика функции будут прямые, заданные уравнением $y=kx+b$, где коэффициенты k и b определяются равенствами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Поскольку

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2x}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right)=5,$$

то единственной наклонной асимптотой будет прямая $y=x+5$.

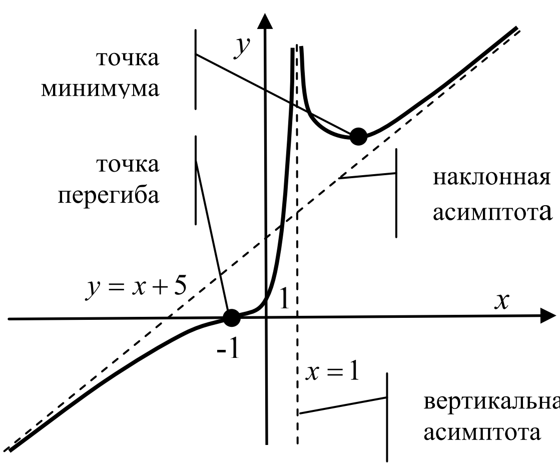


Рис. 19а

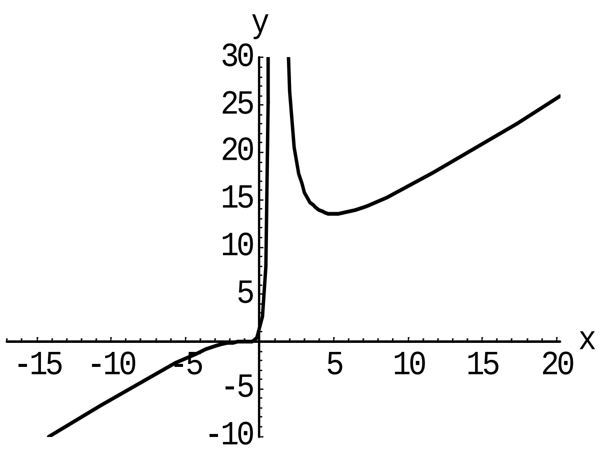


Рис. 19б

График данной функции, построенный по результатам исследования, представлен на рис. 19а. На другом рисунке (рис. 19б) представлен график этой же функции, рассчитанный и построенный компьютерной программой «Mathematica 5.0».

Приложение. Эластичность функции.

В экономических исследованиях часто используется понятие эластичности функциии.

Определение. *Эластичностью функции* $\mathrm{E_x}(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции* $y=f(x)$ *к относительному приращению аргумента x при* $\Delta x\to 0$*:*

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}y'.$$

Если эластичность функции представить в виде

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{y}\cdot 100\%}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot 100\%},$$

то легко увидеть, что *эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция* $y=f(x)$ *при изменении независимой переменной x на 1%.*

Пользуясь понятием дифференциала, эластичность можно представить иначе:

$$\mathrm{E_x}(y)=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{y}}{\dfrac{dx}{x}}=\frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}.$$

Геометрическая интерпретация

Эластичность функции $y=f(x)$ можно найти из графика этой функции. По определению эластичности $E_x(y)=\dfrac{x}{y}y'=\dfrac{x}{y}\mathrm{tg}\,\alpha$, где α - угол наклона касательной к функции $y=f(x)$ в точке $C(x_0,y_0)$ (рис. 20).

Из треугольника ACD :

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\frac{y_0}{AC}=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha .$$

Из треугольника *BCL:*

$$\frac{LC}{BC}=\frac{x_0}{BC}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

Откуда,

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\dfrac{x_0}{-\cos\alpha}}{\dfrac{y_0}{\sin\alpha}}=-\frac{x_0}{y_0}f'(x_0)=-E_x(y)$$

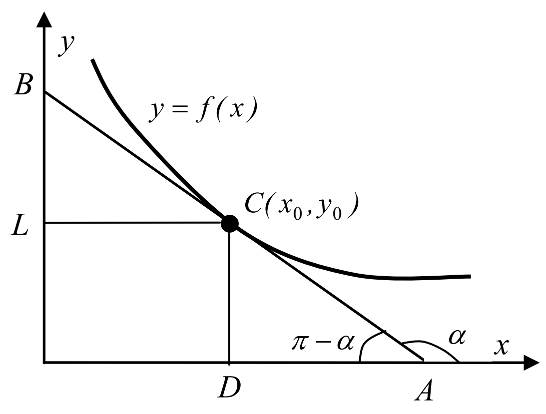


Рис. 20.

т.е. *эластичность убывающей функции равна отношению расстояний по касательной от точки C с координатами* (x_0, y_0) *до ее пересечения с осями ординат и абсцисс, взятому со знаком минус*. Таким образом, если аккуратно построить график функции $y = f(x)$ и провести касательную к кривой в исследуемой точке $C(x_0, y_0)$, можно приблизительно определить величину эластичности функции в этой точке.

Свойства эластичности функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную на промежутке. Вспомним, что производная есть отношение дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

1. *Эластичность есть безразмерная величина* $\mathrm{E_x}(y) = E_{ax}(by)$.

◄Доказательство очевидно: $E_{ax}(by) = \dfrac{ax}{by}\dfrac{d(by)}{d(ax)} = \dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}y'$.►

2. *Эластичности взаимно обратных функций есть взаимно обратные величины*

$$\mathrm{E_x}(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

$$◄\ \mathrm{E_x}(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{E_y(x)}.►$$

3. *Эластичность произведения функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *равна сумме их эластичностей* $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$.

◄При доказательстве свойства воспользуемся следующим свойством дифференциала $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$. Тогда

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}\frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv}\frac{vdu + udv}{dx} = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} + \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) + E_x(v).►$$

4. *Эластичность отношения функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *равна разности их эластичностей*

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

◄Доказательство аналогично:

$$E_x(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}) = \frac{x}{\frac{u}{v}}\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{x}{\frac{u}{v}}\frac{vdu - udv}{v^2dx} = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} - \frac{x}{v}\frac{dv}{dx} = E_x(u) - E_x(v).►$$

5. *Эластичность суммы функций* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *равна сумме их эластичностей, взятых с соответствующими весами*:

$$\mathrm{E_x}(u+v)=\frac{u}{u+v}E_x(u)+\frac{v}{u+v}E_x(v).$$

◀Доказательство

$$\mathrm{E_x}(u+v)=\frac{x}{u+v}\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{x}{u+v}\frac{du}{dx}\frac{u}{u}+\frac{x}{u+v}\frac{dv}{dx}\frac{v}{v}=$$

$$\frac{u}{u+v}\cdot\frac{x}{u}\frac{du}{dx}+\frac{v}{u+v}\cdot\frac{x}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{u}{u+v}E_x(u)+\frac{v}{u+v}E_x(v)$$ ▶

Эластичность элементарных функций

Вычислим эластичности некоторых функций.

1. Степенная функция $\mathrm{y}=\mathrm{x}^{\alpha}$. Ее эластичность:

$$\mathrm{E_x}(x^{\alpha})=\frac{x}{x^{\alpha}}\frac{d(x^{\alpha})}{dx}=\frac{x}{x^{\alpha}}\frac{\alpha x^{\alpha-1}dx}{dx}=\alpha.$$

2. Показательная функция $y=a^x$.

$$\mathrm{E_x}(a^x)=\frac{x}{a^x}\frac{d(a^x)}{dx}=\frac{x}{a^x}\frac{a^x\ln a\cdot dx}{dx}=x\ln a.$$

3. Логарифмическая функция $y=\ln x$.

$$E_x(\ln x)=\frac{x}{\ln x}\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{\ln x}.$$

4. Линейная функция $y=ax+b$.

$$E_x(ax+b)=\frac{x}{ax+b}\frac{d(ax+b)}{dx}=\frac{ax}{ax+b}.$$

Функция в зависимости от величины своей эластичности может быть

совершенно эластичная	$\lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert=+\infty$
эластичная	$1<\lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert<+\infty$
неэластичная	$0<\lvert\mathrm{E_x}(y)\rvert<1$
совершенно неэластичная	$\mathrm{E_x}(y)=0$

Эластичность функций применяется, например, при анализе спроса и потребления, в процессе анализа проектных рисков в ходе исследования изменений критериев оценки проектной эффективности в зависимости от изменений факторов риска.

Так, эластичность спроса Q по цене P

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(Q) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$$

показывает величину относительного изменения спроса на какой-либо товар при изменении цены этого товара. Она характеризует «чувствительность» потребителей к изменению цен на продукцию.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать и доказать теорему о производной монотонной функции.
2. Сформулировать определение локального максимума и минимума функции.
3. Сформулировать и доказать теорему о необходимом условии экстремума.
4. Сформулировать и доказать теорему о первом достаточном условии экстремума.
5. Сформулировать и доказать теорему о втором достаточном условии экстремума.
6. Привести схему исследования функции на экстремум.
7. Сформулировать определение наибольшего и наименьшего значения функции.
8. Сформулировать определение выпуклости функции.
9. Сформулировать и доказать теорему об условиях направленности выпуклости функции вверх или вниз.
10. Дать определение точки перегиба и сформулировать необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
11. Привести определения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот графика функции.
12. Привести схему полного исследования функции с целью построения ее графика.
13. Сформулировать определение эластичности функции, дать геометрическую интерпретацию.
14. Перечислить и доказать свойства эластичности функции.

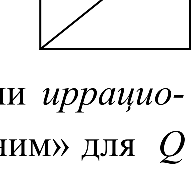
«КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

> « Число в математике, как и время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам».

Из истории чисел. Понятие числа складывалось в математике постепенно с развитием общества, а также под давлением как практики, так и внутренних потребностей самой математической науки. Можно не останавливаться на подробностях числовых множеств $N \subset Z \subset Q$ (натуральных, целых, рациональных чисел) – их появление и становление имеет очевидную практическую востребованность. (**!** Заметим лишь, что введение отрицательных чисел *можно интерпретировать* как необходимость решения уравнения $x+n=0, n\in N$, а потребность рациональных чисел – для решения уравнений $mx+n=0, \quad m,n\in N$.)

Переход $(Q \to R)$ от рациональных чисел к действительным вызван скорее внутренней логикой развития математики, чем практическими потребностями. В частности, к необходимости введения действительных чисел привело известное математическое открытие, вытекающее из теоремы Пифагора и состоящее в том, что диагональ единичного квадрата несоизмерима с его сторонами (т.е. не может быть измерена – или по-другому, нет такого рационального числа вида $\dfrac{p}{r}$, обозначающее длину диагонали – или, что нет такой «единицы», что, разбив ее на q «кусочков» $\left(\dfrac{1}{q}\right)$ и, взяв потом p таких «кусочков» $\left(p\cdot\dfrac{1}{q}\right)$, полученной «линейкой» измерим длину диагонали).

! Заметим, что для чисто практических целей рациональных чисел вполне хватает, так как с их помощью можно с любой наперед заданной точностью произвести измерение любой величины.



Алгебраическая запись факта «несоизмеримости» диагонали ведет к необходимости решить уравнение $x^2=2$. Это уравнение во множестве рациональных чисел Q не имеет решения. Тогда «решили» ввести новый «символ» $\sqrt{2}$ (его назвали *иррациональным*), которого нет во множестве Q, т.е. он является «внешним» для Q (не принадлежащим Q) и расширить множество Q, вводя новые «числа» вида $r_1 + r_2 \cdot \sqrt{2}$, где $r_1, r_2 \in Q$ пробегают все Q. Эти числа (и пределы последовательностей из таких чисел) относят к *действительным (вещественным) числам.* Эти числа как бы заполняют промежутки между рациональными числами. Этот факт очень важен для математики, так как действительные числа представляют собой ту непрерывную среду, в которой помещены рациональные числа, и где становится совершенно ясным, что для чисел характерно не только наличие действий сложения (**!** имеется трудность, например, сложения чисел с непериодическими дробями – как сложить бесконечные «хвосты» – в арифметике оперируют лишь с конечными числами), умножения, деления, но также *неарифметическая операция предельного перехода.*

Конечно же, та «непрерывная» среда, куда «затолкали» (обманули, вклеили, и т.п.) рациональные числа, содержит много тайн. Например, если сравнивать «количество» элементов этих множеств (как говорят еще, сравнивать мощности этих множеств), то оказывается, что множество действительных чисел R, «больше» (мощнее), чем другие множества N, Q, чисел (хотя их тоже бесконечно много). Среди парадоксов бесконечных множеств, например, следующее: все множество и его часть (подмножество) имеют одинаковое «количество» элементов $-\{10,11,12,....\} \subset N$.

Про множество N натуральных чисел говорят, что оно *счетно*. Можно доказать, что Z и Q в некотором смысле эквиваленты множеству N, т.е. имеют одну и ту же мощность (т.е. являются счетными). Множество же R не является счетным, оно «больше». Про множество R говорят, что оно имеет *мощность континуума.*

! Интересно заметить, что множество R и его подмножество – например, интервал $(0,1)$) – имеют одну и ту же мощность континуума.

Для сравнения мощностей находят так называемые *кардинальные числа*. Тогда факт, что R больше Q записывается $card(R) > card(Q)$.

Далее, множество иррациональных чисел тоже сложно устроено. *Есть иррациональные алгебраические числа*, т.е. это такие иррациональные числа, которые являются корнем некоторого алгебраического многочлена (т.е. многочлена некоторой конечной степени с целыми коэффициентами). Множество алгебраических иррациональных чисел счетно. Остальные иррациональные числа, т.е. числа, которые не являются алгебраическими, называют *трансцендентными числами.* Так как множество R имеет мощность континуума, а все перечисленные его подмножества (N,Q, множество алгебраических чисел) имеют меньшую мощность (счетные), то следовательно множество иррациональных трансцендентных чисел самое большое из них и имеет мощность континуума. Но, парадокс! Указать конкретно (предъявить) эти числа весьма непросто. (Чисел много больше, чем в N, а «показать» эти числа трудно!). Точнее, трудно доказать, что именно предъявленное число трансцендентно.

Примеры трансцендентности чисел. Совсем недавно доказали, что знаменитые числа «е» , «π»(Линдеман. 1882 г) являются трансцендентными (Напомним, что число «π»можно интерпретировать как отношение длины окружности к ее диаметру. Тогда с учетом трансцендентности числа «π» можно понять невозможность решения старинной задачи о квадратуре круга). Числа вида α^{β}, где α алгебраическое, а β – иррациональное число, также является числом трансцендентным (Гельфонд, 1934).

! Любопытна так называемая « 7-ая проблема Гильберта»: Есть ли множества промежуточной мощности между «счетным» и « континуумом»? Была гипотеза, что нет таких множеств. В 1968 году Коэн (США) доказал неразрешимость этой проблемы, т.е. она не может быть не доказана, ни опровергнута (примерно ситуация как с «5-м пастулатом» Евклида).

Если теперь вернуться к 1-ой фразе в начале лекции, то должно быть ясно слушателям, что, действительно, числа (как математический объект) вещь далеко не тривиальная.

Перейдем теперь к очередному расширению, теперь уже расширению множества действительных чисел $R \to C$.

Подобно тому, как в ситуации, когда алгебраическое уравнение $x^2 = 2$ не имело решения во множестве рациональных чисел Q, и тогда для «исправления» этой ситуации был введен «внешний» (относительно Q) символ $\sqrt{2}$ и сделано расширение $Q \to R$, путем добавления иррациональных чисел, так что это уравнение стало разрешимым в расширенном множестве. Точно так же для квадратного уравнения $x^2 = -1$, можно ввести «внешний» символ $i = \sqrt{-1}$ и решение уравнения записать в виде $x = \pm\sqrt{-1}$ или $x = \pm i$. Здесь символ $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$ (введен, по-видимому, Эйлером) обозначает новое, «недействительное», число.

Нет такого действительного числа, квадрат которого равен «– 1»! Его называют «мнимой единицей». С помощью этого символа можно сделать расширение $R \to C$ так, что любое квадратное уравнение будет иметь решение в новом множестве C. Например, $x^2 - 2x + 4 = 0$ имеет $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3\cdot(-1)} = 1 \pm \sqrt{3}\cdot i$. Уже древние индусы знали, что не все квадратные уравнения решаются. Но они, и арабские математики, которые много занимались теорией уравнений, относились к этому спокойно – не все же на свете имеет решение!

Конечно, только возможность извлекать корень квадратный из отрицательного числа недостаточна, чтобы заводить в математике новые числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появилось в трудах Кардано (1545), который искал выражения в радикалах для решений уравнений 3-ей и 4-ой степеней. (Заметим, что Абель доказал, что, вообще говоря, решения уравнений выше 4-ой степени не выражаются в радикалах.) Он счел их бесполезными и непригодными к употреблению. Действительно, недоверие к этим числам отразилось даже в названии «мнимое». Это недоверие усугублялось тем, что некритическое перенесение формул обычной алгебры на мнимые числа порождало неприятные парадоксы. Например, $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, но по правилам действия с квадратными корнями получим $-1=i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$. (Отметим наперед, что для комплексных чисел нет понятия арифметического корня). Многие математики того времени изгоняли их, не признавали природы их, казалась им неясной, загадочной и даже мистической. Например, Ньютон не включал мнимые величины в понятие числа, Лейбниц – тоже, и ему принадлежит высокопарная фраза «Мнимые числа – это убежище божественного духа, почти что амфибия (гибрид) бытия и небытия».

Пользу мнимых величин впервые оценил Бомбелли (1572 г.). Он для записи решений кубических уравнений, которые имеют три действительных корня, использовал мнимые величины. Кроме того, дал описание основных операций над числами новой породы.

Термин «Комплексные числа» ввел Карно, но полное «гражданство» комплексным числам дал Гаусс. На протяжении 200 лет шли споры о природе комплексных чисел и само название «мнимые» числа отражало их нелегальный характер. Только на рубеже 18 – 19 веков Гаусс придал им полные гражданские права, дал им геометрическую интерпретацию, доказал основную теорему алгебры (любой многочлен имеет хотя бы один корень – действительный или комплексный). Комплексным числам предстоял долгий путь, прежде чем они стали ценнейшим математическим инструментом для решения важных прикладных задач в механике (упругость каркасов кораблей), физике (профили крыльев самолетов), гидродинамике (обтекание препятствий).

Раз появились новые числа, то неизбежно и рассмотрение функций от этих чисел. Переход к функциям от комплексной переменной дал возможность глубже изучить элементарные функции и установить интересные связи между ними. Например,

1) $|\sin z| > 1$ (вопреки школьным представлениям);

2) тригонометрические функции являются комбинациями показательных

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right);$$

3) функция e^x – периодична (ее период равен $2\pi\ i$).

Вскрываются неожиданные соотношения между «знаменитыми» числами:

$(e^{\pi})^i = -1$ или $(e^{\pi})^{\sqrt{-1}} = -1$ (коллекция трех удивительных чисел – вполне порядочное число);

Или еще $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k = 0, \pm 1, ...$

Вышесказанное становится любопытным и делает притягательным изучение комплексные числа.

2. Определение комплексных чисел

Чтобы уйти от упоминания о «сомнительном» символе $i = \sqrt{-1}$ и всякой мистики, мы для построения множества комплексных чисел воспользуемся хорошо известными чисто алгебраическими операциями (как это делал Гамильтон), которые будем осуществлять над *парой* обычных действительных чисел и тем самым дадим вполне реальную (не мистическую) интерпретацию комплексным числам. Эту пару можно обозначать либо (a, b) либо $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Нагляднее, как нам представляется, выбрать как $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, где $a, b \in R$ - действительные числа.

Определение 1. *Комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных (действительных) чисел (или компонент), которые удовлетворяют следующим аксиомам:*

1^0. Пары $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ считаются равными, когда равны их компоненты,

т.е. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases};$

2^0. Суммой пар $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ называется пара $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$,

т.е. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$;

3^0. Произведением пар $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ называется пара $\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}$,

т.е. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}$;

4^0. Пара $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ отождествляется с вещественным числом a, т.е. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} a.$

Множество комплексных чисел обозначается буквой C

Итак, в данном определении комплексных чисел введены понятия равенства, суммы, произведения, а также, чтобы «погрузить» все вещественные числа R в новое множество чисел введено понятие отождествления специальных пар (с нулевой второй компонентой) с вещественным числом.

(**!** заметим, отношение неравенства «<» не вводится для комплексных чисел).

Следовательно, множество действительных чисел является составной частью комплексных чисел. Это хорошо. Но возникает вопрос: дело в том, что во множестве действительных чисел R уже есть привычные для нас операции сложения, умножения. Так, если окажется, что введенные новые операции расходятся (конфликтуют) с известными, то это приведет к кошмарной путанице. Поэтому надо убедиться, что конфликта нет.

А) Для этого прежде всего сопоставим аксиому 4^0 с остальными $1^0 - 3^0$.

(4^0-и-1^0). Если действительные числа равны $a = b$, то по свойству 4^0 пары $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ также равны , так как по свойству 1^0 имеем $\begin{cases} a = b \\ 0 = 0 \end{cases}$.

(2^0-и-4^0). Обычная сумма чисел $a + b$ по аксиоме 2^0 представляет пару

$$a + b = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} \overset{4^0}{=} (a+b).$$

(3^0-и-4^0). Произведение $a \cdot c = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - 0 \cdot 0 \\ a \cdot 0 + 0 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ 0 \end{pmatrix} = ac$.

Таким образом, аксиома 4^0 хорошо согласована с $1^0 - 3^0$ и не приводит к путанице, т.е все привычные свойства для действительных чисел сохраняются для этих чисел, записанных как комплексные числа.

Обратим внимание, что умножение на действительное число $m \in R$ есть $m \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma - 0 \cdot b \\ mb + 0 \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix}$, что соответствует умножению компонент комплексного числа. Если m – натуральное, то с учетом предыдущего

$$m \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \ldots + a \\ b + \ldots + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma \\ mb \end{pmatrix},$$ что согласуется с обычным последовательным сложением чисел.

В) Теперь надо еще проверить, что аксиомы 2^0 и 3^0 согласованы в себе и друг с другом так, что привычные нам действия над действительными числами сохраняются при переходе к комплексным числам.

О каких «привычных» действиях идет речь?

1) Коммутативность сложения

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + a \\ d + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2) Ассоциативность сложения

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right).$$

3) Существование нулевого элемента

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0 \\ b + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$ Таким образом, пара $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{4^0}{=} 0$ есть «ноль» для комплексных чисел.

4) Существование для каждой пары «противоположного» числа:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

5) Коммутативность умножения (упр.).

6) Дистрибутивные законы $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$

7) Ассоциативность умножения $\left[\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right].$

8) Роль «единицы» $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Rightarrow$ Таким образом, пара $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\overset{4^0}{=}1$ играет роль «единичного» нейтрального элемента для умножения комплексных чисел.

9) Существование обратного элемента: как для ненулевой пары $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ определить обратную ему пару $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^{-1}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^{-1}=1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ?$$

Для этого введем понятие сопряженных комплексных чисел.

Если есть пара $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, то сопряженной для нее называют пару $\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$ (т.е. отличается только знаком второй компоненты).

Перемножим теперь число со своим сопряженным числом

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b(-b)\\-ab+ba\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2\\0\end{pmatrix}=(a^2+b^2)\Rightarrow a^2+b^2=0 \text{ так как } \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

Следовательно, если $a^2+b^2\neq 0$, то $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq 0$. Разделим теперь полученное выше равенство на $a^2+b^2\neq 0$:

$$1=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a/(a^2+b^2)\\-b/(a^2+b^2)\end{pmatrix}\Rightarrow$$ Таким образом, для любой пары $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq 0$ существует обратный элемент $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a/(a^2+b^2)\\-b/(a^2+b^2)\end{pmatrix}$

такой, что $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^{-1}=1.$

Итак, мы показали, что новоиспеченные комплексные числа обладают всеми привычными для нас свойствами. В современной алгебре такую алгебраическую структуру называют полем (поле действительных чисел, поле комплексных чисел). Отметим, что в зависимости от наличия (чаще всего отсутствия) тех или иных свойств в алгебраической структуре различают такие алгебраические объекты как группа, кольцо, тело.

3. Традиционная форма записи комплексных чисел.

Где же среди введенных новых чисел спрятано «хитроумное» мнимое число $i=\sqrt{-1}$?!

Из аксиомы 3^0 следует, что $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-1\cdot 1\\0\cdot 1+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\overset{4^0}{=}-1.$

Тогда, если буквой « i » обозначить пару $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, то имеем $i\cdot i=i^2=-1$, т.е. «мнимая единица» получила **реальное** истолкование как одной из пар, а именно пары вида $i=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Тогда любое комплексное число можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot a+bi=a+bi \qquad (*)$$

Итак, комплексным числом называются числа вида $z=a+bi$ где $i^2=-1$. Это традиционная алгебраическая форма комплексных чисел, При этом первая компонента называется действительной частью комплексного числа $a=Re\,z$, вторая – мнимая часть $b=Im\,z$.

Подчеркнем, что как $Re\,z$ так и $Im\,z$ есть действительные числа.! Следует различать выражение, «мнимая часть комплексного числа» и «мнимое число». Множитель « i » в записи комплексного числа можно трактовать как указание на то, что « b » есть вторая компонента пары $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. При этом, число $\bar{z}=a-bi$ является сопряженным для числа $z=a+bi$.

4. Геометрическое изображение комплексных чисел

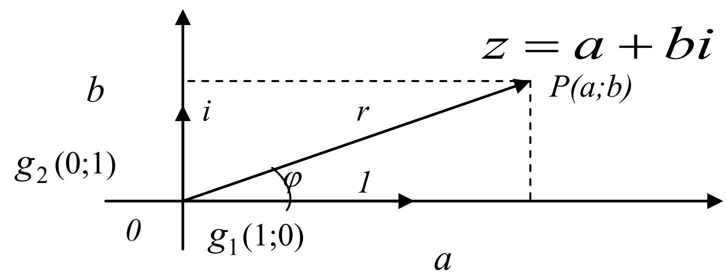
Мы привыкли, что множество R удобно изображать точками на прямой. Как быть с новыми числами ?

Для геометрического истолкования комплексных чисел формулу (*) перепишем в виде

$$z = a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

т.е. комплексное число $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ можно трактовать как точку координатной плоскости или вектор ОP с координатами a и b в единичном базисе

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Плоскость, на которой изображают комплексные числа называют плоскостью комплексной переменной. Ее ось абсцисс называют вещественной осью, а ось ординат – мнимой осью в соответствии с наименованием частей комплексного числа z.

Векторы g_1 и g_2 обычно не пишут (оставляют « 1 » на вещественной оси и « i » – мнимая единица на мнимой оси).

Легко видеть, что при этом сопряженное число $\bar{z} = a - bi$ – симметрично относительно действительной оси числу $z = a + bi$.

Кроме традиционной (алгебраической) записи комплексного числа существуют и другие их записи.

Рассмотрим комплексное число $z = a + bi$ и изобразим его на плоскости в прямоугольной системе координат. Обозначим через r расстояние от 0 до точки *P(a; b)*, а через ϕ – угол , образованный лучом 0P с положительным направлением действительной оси 0x, отсчитываем против часовой стрелки ($0 \le \phi < 2\pi$).

Число r называют модулем комплексного числа и обозначают $r = |z|$, число ϕ – аргументом (главным) и обозначают $\phi = \arg z$.

Очевидно, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cdot \cos\phi \quad b = r \cdot \sin\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{a}{r}, \quad \sin\phi = \frac{b}{r} .$$

Тогда $z = a + bi = r\cos\phi + r\sin\phi \cdot i = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Например:

1) $z = i \quad \Rightarrow |z| = 1, \quad \phi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (i = 1\cdot(\cos\phi + i\sin\phi) = i)$,

2) $z = 1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$,

3) $-1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$,

4) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Операции над комплексными числами

Речь идет об обычных операциях (сложение, вычитание, умножение, деление, выведение в степень, извлечение корней).

Удобство выполнения операций зависит от избранной ***формы представления*** комплексных чисел. Сразу же заметим, что представление комплексных чисел, как пар $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, данное в определении неудобно для счета – оно требовалось для корректного и внятного определения новых объектов без использования мистического символа $\sqrt{-1}$.

Чаще всего используют традиционную алгебраическую $z = a + bi$ или тригонометрическую $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ формы записи. Позже мы введем еще одну ─ показательную (экспоненциальную) форму представления.

Сложение (вычитание) просто осуществить в традиционной форме $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Произведение двух комплексных чисел $(a + bi)\cdot\ (c + di)$ производится как умножение над обычными двучленами, а затем в итоговом результате надо выражение «i^2» заменить на «-1».

$$(1 + 2i)(2 - 3i) = 1\cdot 2 + 4i - 1\cdot 3i - 6i^2 = 2 + i + 6 = 8 + i.$$

Деление обычно осуществляется путем домножения на сопряженное знаменателя $\dfrac{2+i}{3-i} = \dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{6 + 3i^{-1} + 2i + i^2}{9+1} = \dfrac{5+5i}{10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Возведение в степень уже становится громоздким. Прежде выясним, что происходит при возведении в степень мнимой единицы i:

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2\cdot i = -i, \quad i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \quad i^5 = i^4\cdot i = i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *Таким* образом, идет чередование $(i, -1, -i, 1), (i, -1, -i, 1)\ldots$

По соглашению считаем , что $i^0 = 1$.

Извлечение квадратного корня: положим

$$\sqrt{a+bi}=x+yi\Rightarrow a+bi=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=$$

$$=(x^2-y^2)+(2xy)i \overset{1^0}{\Rightarrow}\begin{cases} a=x^2-y^2 \\ b=2xy \end{cases}\Rightarrow x,\, y.$$

Эти формулы показывают, что операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения квадратного корня – **громоздки**. Поэтому для упрощения обычно используют тригонометрическую форму записи комплексных чисел.

Умножение: $r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)=r_1\cdot r_2(\cos(\phi_1+\phi_2))$.

Возведение комплексного числа в целую степень:

$(r(\cos\phi+i\sin\phi))^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)\Rightarrow$ при $r=1$ следует известная формула Муавра $\qquad (\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$.

Деление: очевидно $\dfrac{r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)}{r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2))$.

Извлечение корня (натуральной степени) из комплексного числа $\sqrt[n]{z}$.
Пусть $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$.

Тогда можно показать, что $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно « n » штук различных значений:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right),\text{ где } k=0,1,2,...,n-1.$$

Отметим, что если k заставить принимать больше значений, то пойдет «повторение» уже найденных чисел.

Например $\sqrt[n]{-1}=\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{n}+i\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{n}$, $k=0,1,2,...,n-1$.

$$n=2\quad\begin{cases}\sqrt[n]{-1}\overset{k=0}{=}\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i\\[2mm] \sqrt{-1}\overset{k=0}{=}\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}=-i\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{перемножая }\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\\ \text{возможны 4 комбинации}\\ \text{см. введение}\end{array}\Rightarrow\begin{Bmatrix}+1\\-1\end{Bmatrix}\right]$$

6. Экспонента с комплексной переменной

Имеет место следующая формула Эйлера (возведение в мнимую степень)

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \text{ – формула Эйлера}$$

Строгое обоснование этой формулы можем получить из соотношения

$$e^{z} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}.$$

Отсюда следует (см. также тригонометрическую форму записи), что для записи комплексных чисел можно использовать так называемую показательную форму записи

$$z = re^{i\phi}.$$

Тогда, например, умножение чисел легко реализуемо как

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

Аналогично, деление чисел $z_1/z_2 = r_1 e^{i\phi_1}/r_2 e^{i\phi_2} = r_1/r_2 e^{i(\phi_1-\phi_2)}$

Определим экспоненциальную функцию с произвольным комплексным параметром $\lambda = \alpha + i\beta$ следующим образом:

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Функция $e^{\lambda x}$ обладает всеми свойствами, которые справедливы для вещественных чисел $\lambda \in R$:

1) $e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$; 2) $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$; 3) $\int e^{\lambda x}dx = \frac{1}{x}e^{\lambda x} + e, \quad \lambda \neq 0$.

Задача. *Найти вещественное решение уравнения* $\cos\sqrt{x} = 5$.

Из формулы Эйлера следует $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \forall z \in \Omega$.

Поэтому данное уравнение можно записать в виде $\dfrac{e^{i\sqrt{x}}+e^{-i\sqrt{x}}}{2} = 5$ или

$$y + \frac{1}{y} - 10 = 0, \quad \text{где} \quad y = e^{i\sqrt{x}}.$$

Откуда находим, что $e^{i\sqrt{x}} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, то есть $i\sqrt{x} = \ln(5\pm 2\sqrt{6})$

или окончательно $x = -\ln^2(5\pm 2\sqrt{6})$.

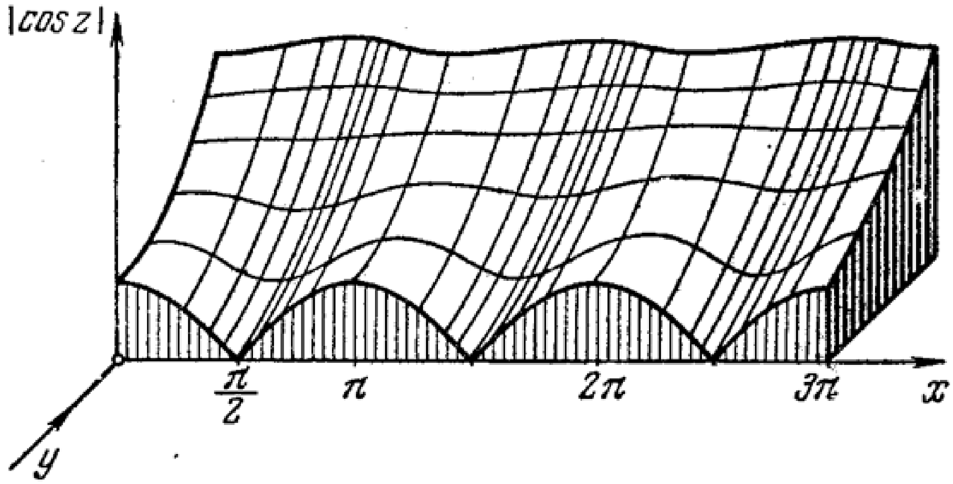
Тригонометрические функции комплексной переменной $z \in C$ можно ввести, опираясь на формулы Эйлера:

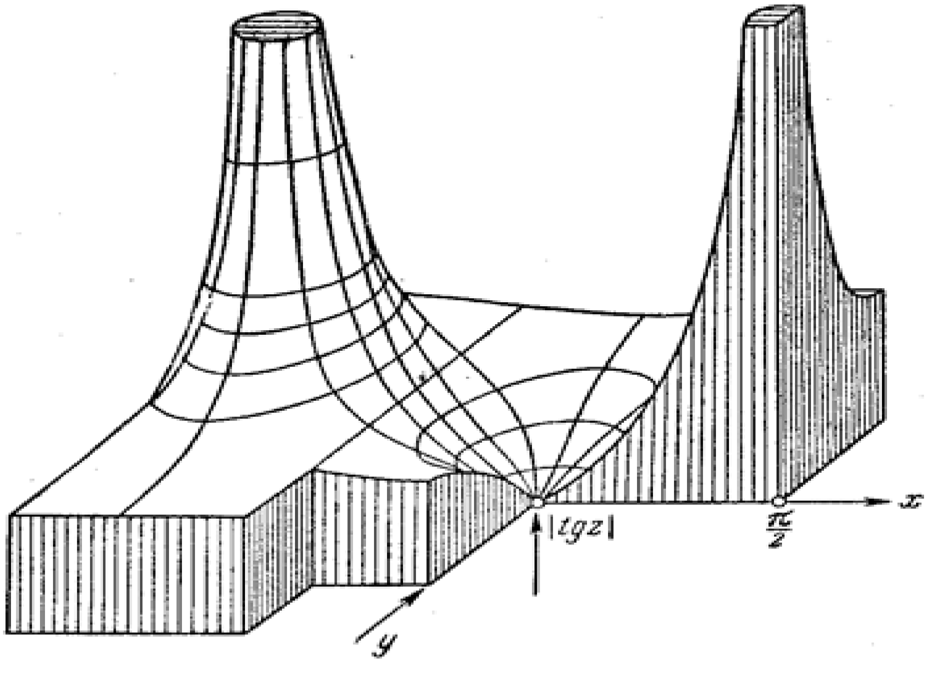
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

Остальные обычным образом

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Графики некоторых тригонометрических функций:





Замечание.

Делались неоднократные попытки сделать и другие обобщения действительных и комплексных чисел (Гамильтон). Наиболее известными являются так называемые квантернионы, которые имеют четыре «единицы» 1, i, j, k, для которых имеется своя «арифметика». Эти числа находят применение, например, при описании вращений четырехмерного пространств, широко используемых в квантовой физике. Отметим, что иные такого рода «безконфликтные» обобщения (например, в виде триплетов) невозможны.