МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(2 семестр)

Учебно-методическое пособие

для подготовки к экзамену

и

компьютерному тестированию.

2014

Авторы-составители: Дымков М.П. - д.ф. - м.н., профессор, Денисенко Н.В.- к.ф.- м.н., доцент, Конюх А.В. - к.ф. - м.н., доцент, Майоровская С.В. - к.ф. - м.н., доцент, Петрович В.Д., - старш. преп., Рабцевич В.А.- к.ф. - м.н., доцент,.

Высшая математика (2 семестр): Учебно-методическое пособие для подготовки к компьютерному тестированию для студентов ЗФО. - Мн.: БГЭУ, 2014. - 60 с.

Учебно-методическое пособие включает спецификацию теста, краткое описание тематики тестов, варианты возможных тестов, часть которых дана с ответами, а остальные приведены для самостоятельного решения. В сборник материалов включены примеры типовых тестовых заданий, разработанные преподавателями кафедры высшей математики БГЭУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для использования студентами ЗФО при самостоятельной подготовке к компьютерному тестированию по курсу «Высшая математика (Второй семестр)», введенному вместо письменных контрольных работ.

Тестовые задания разработаны в соответствии с требованиями учебных программ высших учебных заведений для студентов экономических специальностей.

Просьба сообщать на кафедру высшей математики (ауд. 430, уч. корп. 2) сведения (лучше в письменном виде и подробно) обо всех замеченных сбоях программы, ошибках и неточностях в заданиях.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ТЕСТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

(2 семестр)

Введение

Тест по курсу «Высшая математика» разработан для его использования при оперативном контроле текущей успеваемости и промежуточной аттестации студентов с целью оценки их уровня подготовки по данной дисциплине.

Уровень сложности заданий и их содержание полностью соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта по высшей математике для экономических специальностей ВУЗов.

Система электронного тестирования представляет собой постоянно пополняемую базу данных задач, сгруппированных по ключевым темам курса. Формирование конкретного теста осуществляется преподавателем и заключается в выборе тем, по которым будут предлагаться тестовые задания. Список вопросов конкретного теста формируется из перечня вопросов по данной теме. При каждой новой попытке сдачи теста вопросы выбираются случайным образом из разных разделов, что исключает их повторение и дублирование.

Количество вопросов в тестовом задании – 8.

Время выполнения теста – 20 минут.

Сборник содержит подборку тестовых заданий по всем темам и несколько возможных вариантов тестов по 8 тестовых заданий в каждом, которые в совокупности охватывают все разделы курса, изучаемые во втором семестре.

1. Разделы учебной программы, подлежащие тестированию

Дисциплина: Высшая математика.

Таблица 1

2.7. Функции двух переменных
1. Частные производные 1-го и 2-го порядка.
2. Полный дифференциал и его приложения.
3. Экстремумы функций двух переменных.
2.8. Интегральное исчисление
Неопределенный интеграл
1. Определение и свойства. Таблица основных интегралов.
2. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование некоторых видов иррациональностей.
5. Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций.
Определенный интеграл
1. Определение и свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Метод подстановки и интегрирование по частям в о.и.
2. Приложения определенного интеграла (площади, длины линий, объемы тел вращения, экономические приложения).
3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от разрывных функций.
2.9. Дифференциальные уравнения
1. ДУ первого порядка (с разделенными и разделяющимися переменными, однородные ДУ и приводимые к ним, ДУ в полных дифференциалах).
2. Линейные ДУ первого порядка.
3. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами второго порядка.
2.10. Числовые и степенные ряды
1. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
2. Знакопеременные ряды.
3. Область сходимости степенного ряда.
4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2. Цель теста. Помочь в подготовке и проверить степень усвоения материала студентами по данной дисциплине. Студент допускается к сдаче экзамена лишь в случае положительного результата тестирования. Количество попыток лимитируется и определяется лишь техническими возможностями компьютерных классов, в которых осуществляется тестирование. Студент допускается к сдаче теста только после предъявления зачётки или студенческого билета. Ввод персональных данных студента и запуск теста осуществляет администратор компьютерного класса (лаборант). Результат сдачи теста (лучшая попытка) автоматически заносится в базу данных. Тем самым сведения становятся доступными для просмотра преподавателю и поступают в деканат.

Кроме того, компьютерная система может быть использована студентами для самопроверки знаний, текущего и промежуточного контроля знаний по практической части соответствующих разделов и дифференциации студентов по уровню их подготовки. Тест также может быть использован студентами при самостоятельном изучении материала.

3. Тест составлен на основе государственных образовательных стандартов по курсу «Высшая математика» для экономических специальностей ВУЗов.

4. Перечень тем заданий теста приведён выше (таблица 1). Каждый тест охватывает все темы, из которых выбираются 8 конкретных тестовых заданий. Количество заданий в базе данных постоянно пополняется и их содержание в процессе эксплуатации совершенствуется после соответствующего обсуждения на заседаниях кафедры.

5. Уровень сложности теста. Тесты предусматривают задания примерно одинакового уровня сложности. В этих заданиях ставится цель проверить знание основных понятий и формул по разделам, выносимым на тестирование, а также выявить навыки решения простейших стандартных задач по этим разделам. Структура каждого теста и шкала оценок результатов тестирования утверждается на заседаниях кафедры высшей математики.

6. Компьютерная оболочка тестов (форма и вид тестовых заданий на экране, форма выбора ответов, формат ввода и др.) перечислены и подробно описаны в руководстве пользователя.

7. Общее время выполнения теста - 20 мин.

8. Использование теста

Тест может использоваться в процессе подготовки частично (по подразделам) и в полном объеме после завершения изучения семестрового курса высшей математики.

9. Рекомендации по оценке выполнения теста

Шкала оценок результатов тестирования разрабатывается и утверждается на заседаниях кафедры высшей математики. Каждое правильно выполненное тестовое задание оценивается 1 баллом, невыполненное задание — 0 баллов. Результат Для сдачи теста необходимо ответить не менее, чем на половину вопросов (т.е. набрать не менее 50%).

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел II. Математический анализ

2.7. Функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных. Однородные функции. Выпуклые и вогнутые функции. Сходимость последовательностей в пространстве R^n. Предел и непрерывность функции. Частные производные. Полный дифференциал и его применение в приближенных вычислениях. Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

Метод наименьших квадратов. Выравнивание эмпирических данных по прямой и параболе.

2.8. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Неопределенные интегралы основных элементарных функций.

Интегрирование по частям. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций.

Понятие определенного интеграла и его геометрическая иллюстрация. Свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла. Понятие о несобственных интегралах и их сходимости.

2.9. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Понятие решения. Общее решение. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Однородные и неоднородные уравнения второго порядка .

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

2.10. Числовые и степенные ряды.

Числовой ряд и его сходимость. Основные свойства сходящихся рядов. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Теорема Коши. Признак Лейбница.

Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Примерный перечень вопросов по дисциплине «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» (II семестр)

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Непрерывность функции нескольких переменных.
3. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.
4. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия. Достаточное условие экстремума.
5. Понятие об эмпирических формулах. Подбор параметров по способу наименьших квадратов. Выравнивание по прямой, параболе.
6. Определение первообразной функции и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные свойства неопределенного интеграла.
7. Замена переменной (подстановка) в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.
8. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.
9. Интегрирование рациональных функций.
10. Геометрическая задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла.
11. Свойства определенных интегралов.
12. Теорема существования первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона -Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Площадь плоской фигуры. Обьем тела вращения.
15. Вычисление объёма произведенной продукции и средней производительности труда за период.
16. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
17. Несобственные интегралы от неограниченных функций.
18. Дифференциальные уравнения (основные понятия).
19. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменньми.
20. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Модель Эванса.
21. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.
22. Понятие числового ряда и суммы ряда. Геометрическая прогрессия.
23. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда.
24. Интегральный признак сходимости.
25. Признак сравнения для положительных рядов.. Признаки Даламбера и Коши.
26. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
27. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
28. Степенной ряд. Область сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
29. Ряды Тейлора и Маклорена, их применение в приближённых вычислениях.
30. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Литература

1. Яблонский А.И., Кузнецов А.В., Шилкина Е.И. и др.; под общ. ред. Самаля С.А. Высшая математика: Общий курс. Учебник – 2-е изд., переработ. Мн.: Выш. шк., 2000.- 351 с.
2. Шилкина Е.И. Высшая математика. Ч. 2. Мн.: БГЭУ, 2004.
3. Кузнецов А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Мн.: Выш. шк., 1994. – 284 с.
4. Белько И.В., Кузьмич. К.К. Высшая математика для экономистов. Второй семестр. Экспресс-курс. М.: Новое знание, 2008.
5. Л.Н. Гайшун, Н.В. Денисенко, А.В. Марков и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Минск: БГЭУ, 2009. – Ч.2. – 270 с.
6. Белько И.В. Высшая математика для экономистов : [в 3 ч.] / И. В. Белько, Кузьмич К. К. - Москва : Новое знание, 2007 (и новее). — (Экспресс-курс). 2 семестр : [Интегральное исчисление. Дифференц. уравнения. Ряды]. - 86 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.

Тематические тестовые задания

С целью ознакомления студентов с тематикой разработанных тестов ниже приводится часть тестовых заданий из каждого раздела изучаемой дисциплины. Эти задания взяты из действующей компьютерной базы данных, используемой кафедрой высшей математики БГЭУ для проведения тестирования, и могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки.

Отметим, что компьютерной системой предоставляются три типа формы вопросов-ответов на разрабатываемые тестовые задания:

1) выбор правильного ответа (или нескольких правильных ответов, если это оговорено в задании) из набора предложенных вариантов ответа;
2) ввод с клавиатуры правильного ответа (как правило, в виде целого числа, если не оговорено противное в задании);
3) установление правильного соответствия между элементами множеств путем перетаскивания мышкой элемента правого столбца на соответствующий ему элемент в левом столбце.

В приводимых ниже тестовых заданиях предлагаются варианты ответов, один из которых правильный. Некоторые из этих вопросов могут быть заданы при тестировании и в форме 2.

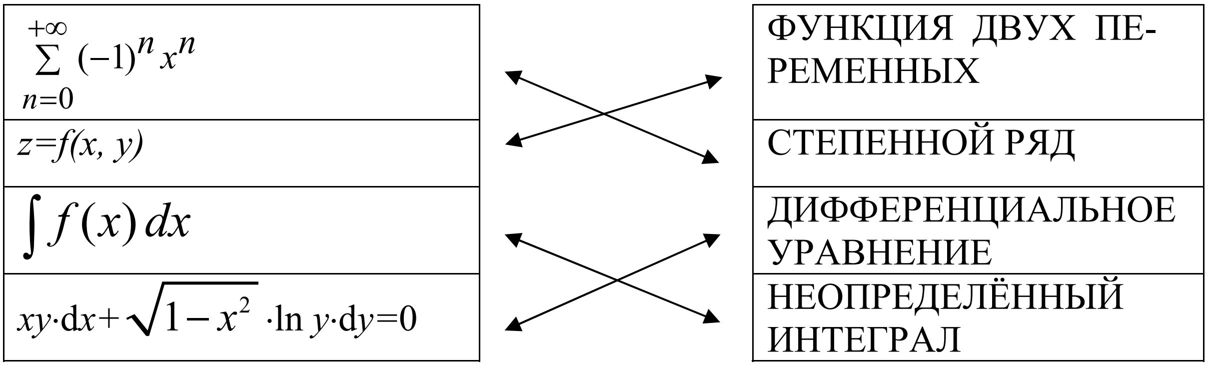
Примеры заданий на сопоставление

Одним из пунктов в тестовом задании может быть вопрос общего вида, выясняющий, как тестируемый ориентируется в основных понятиях, терминах и определениях программы курса. В задании подобного вида надо указать соответствие между элементами левой и правой колонок.

Пример. Установите соответствие, перетащив мышью элемент правого списка на элемент левого

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$	ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
$z=f(x, y)$	СТЕПЕННОЙ РЯД
$\int f(x)\,dx$	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
$xy\cdot dx+\sqrt{1-x^2}\cdot\ln y\cdot dy$	НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Ответ на вопрос формируется следующим образом. Наводим курсор мышки на клетку с текстом в правом ряду, нажимаем левую кнопку и, не отпуская её, переводим курсор на соответствующую клетку в левом ряду, после чего левую кнопку мышки отпускаем. На экране появится стрелка, соединяющая эти две клетки. Аналогичную процедуру необходимо проделать и со всеми оставшимися парами клеток. В итоге ответ на вопрос-сопоставление будет выглядеть, как это показано на рисунке ниже.



Если возникает необходимость очистить назначенные связи и провести операцию их назначения заново, необходимо нажать кнопку «очистить», расположенную под полем со стрелками.

В тестовом задании может содержаться вопрос, касающийся основных понятий конкретного раздела. Так, например, для первого раздела “Функции многих переменных” такими понятиями являются:

функция многих переменных, области определения и изменения;
полное и частное приращения;
частные производные;
полный дифференциал;
экстремум функции.

Например, вопрос по Разделу II может быть вида:

Пример. Установите соответствие, перетащив мышью элемент правого списка на элемент левого:

z – функция переменных x и y	$-y^2+1$ функция одной переменной
Если z (см ответ на редыдущий пункт), то $z(0; y) =$	1 – частная производная по x
$z'_x =$	$-2y\,dy$ - частный дифференциал по y.
$d_y z =$	$z = x - y^2 + 1$

Ответ на поставленный выше вопрос выглядит следующим образом.

z – функция переменных x и y	$-y^2+1$ функция одной переменной
Если z (см ответ на редыдущий пункт), то $z\,(0;\,y) =$	1 – частная производная по x
$z'_x =$	$-2y\,\mathrm{d}y$ - частный дифференциал по y.
$d_y z =$	$z = x - y^2 + 1$

При выполнении теста следует учесть, что последовательность тем заданий в тесте не совпадает с порядком следования разделов в программе, так как каждое конкретное тестовое задание формируется системой случайным образом.

Раздел II. Математический анализ

Функции двух переменных

Функция многих переменных, область определения и область изменения

Пусть D - некоторое множество точек плоскости *Oxy*. Если каждой точке M*(x, y)* из области D соответствует вполне определенное число $z \in E \subset \mathbf{R}$, то говорят, что на множестве D задана *функция двух переменных x* и *y*. Переменные *x* и *y* называются *независимыми переменными,* или *аргументами*, D - *областью определения,* или *существования, функции*, а множество E всех значений функции - *областью* ее *значений.* Функциональную зависимость *z* от *x* и *y* записывают в виде z=f(M), z = f(x, y), z = z(x, y), z = F(x, y) и т.д.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ на плоскости *Oxy* вычисляют по формуле $\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Функция f(M) имеет *пределом число* A, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, если разность f(M) - A есть бесконечно малая, когда $\rho = \rho(M_0, M) \to 0$ при любом способе приближения на плоскости *Oxy* точки M к точке M_0

Функция f(x, y) называется *непрерывной* в точке M_0, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

ПРИМЕР

Если функция $z = \dfrac{1}{4 - y^2 - x^2}$, то на плоскости xOy ее область определения имеет вид…

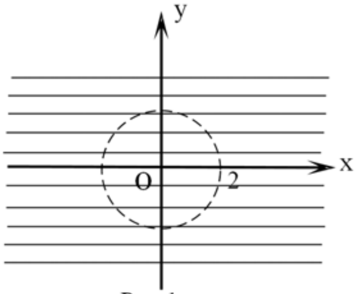


Рис 1.

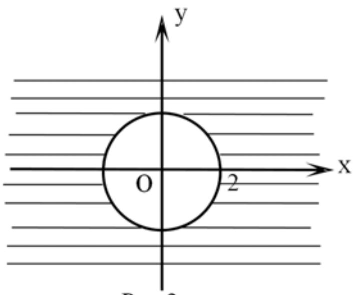


Рис 2.

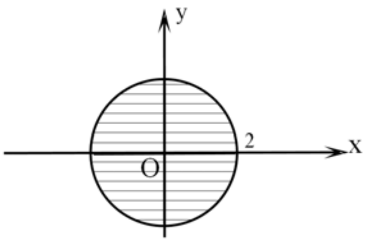


Рис 3.

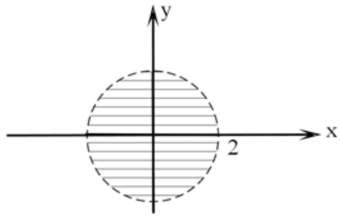


Рис 4.

В ответе запишите номер рисунка.

Решение. Числитель дроби не должен равняться нулю. Приравняв его к нулю, получим: $y^2 + x^2 = 4$. Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R=2. Поэтому область определения функции – вся плоскость кроме данной окружности, т.е. ответом является первый рисунок.

Частные производные 1-го и 2-го порядка

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением функции по x.*

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.** Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Пример. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в произвольной точке $M(x,y)$ для функции $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ и затем найти их значения $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$, если $M_0(1,2)$.

Решение. Имеем : $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_x =$

$= (x^2)'_x - (3xy)'_x + (2y^2)'_x = 2x - 3y(x)' + 0 = 2x - 3y$.

Тогда $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(1,2)} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$. Далее: $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 3xy + 2y^2)'_y =$

$= (x^2)'_y - (3xy)'_y + (2y^2)'_y = 0 - 3x + 4y$. Значит,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(1,2)} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 5.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 4y$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -4$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 5$.

Пример. Найти частные производные функции

$$z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - 3x - 8y$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание
1.	Найти сумму частных производных первого порядка функции $Z = x^2 + y^2$ в точке (–2; 0,5)
2.	Найти произведение частных производных первого порядка функции $Z = arctg(x + y)$ в точке (0; 0)
3.	Если $z = x \ln \frac{y}{x}$, то z'_y равно …

	1) xy; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{x}{y^2}$; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $\ln\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$
4.	Если $z = y\ln\frac{x}{y}$, то z''_{xy} равно … 1) $\frac{y}{x}+1$; 2) $\frac{2y}{x}$; 3) $-\frac{y}{x^2}$; 4) $-\frac{x}{y^2}$; 5) $\ln\frac{x}{y}+\frac{1}{y}$
5.	Найти z''_{yx} в точке $M\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, если $z = 4\ln(x+4y)$
6.	Вычислить частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции двух переменных $z = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ в точке (1;1)

Полный дифференциал и его приложения

Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением*. Если функция f(x, y) дифференцируема в некоторой точке (x, y), то справедливо равенство

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y\,,$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции Δz в точке (x, y). Если функция f(x, y) дифференцируема, то полный дифференциал есть

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,...,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Для приближенных вычислений используют формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2.$$

Подставляем в формулу полного дифференциала:

$$du = y^2 z x^{y^2 z-1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

Пример. Найти в точке М(1;2) полный дифференциал функции $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 5y + 1$).

Решение. Сначала находим частные производные:

$$f'_x(x, y) = (x^3 + 3xy^2 - 5y + 1)'_x =$$
$$= (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x + (-5y + 1)'_x = 3x^2 + 3y^2 \cdot$$

В данном случае числовые коэффициенты и переменная y выступали в роли констант: во втором слагаемом они были вынесены за скобки при дифференцировании, а третье слагаемое от x не зависело – поэтому его производная по x равна нулю. Аналогично ищем производную по y (фиксируем x):

$$f'_y(x, y) = (x^3)'_y + 3x(y^2)'_y - 5(y)'_y + (1)'_y = 6xy - 5$$

Здесь первое и четвертое слагаемые от y не зависят, их производные по y равны нулю.

Теперь вычисляем значения производных в данной точке:

$$f'_x(1;2) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 15; \quad f'_y(1;2) = 6 \cdot 1 \cdot 2 - 5 = 7.$$

Воспользовавшись формулой полного дифференциала, окончательно имеем: $\left. df \right|_M = 15dx + 7dy$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Решение. Из заданного выражения определим частные приращения:

Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) в исходной точке М(1, 2, 1):

u(1, 2, 1)= $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные функции u(x, y, z) в этой же точке М(1, 2, 1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$ = u(1,04; 0,99; 1,02) $\approx u(1,2,1) + du = 1 + 0,05 = 1,05$

Точное значение этого выражения: 1,0492752256873191 76.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание	Варианты ответов
1.	Вычислить полный дифференциал функции $z = arctg(y/x)$ в точке $x = 2,\quad y = 2$ при $\Delta x = 0.1,\quad \Delta y = 0.1$	1. -0.1 2. 0.1 3. 0 4. 0.2
2.	Найти приближенное значение $\sqrt{1.01 \cdot 0.99}$	1. 1.01 2. 0.99 3. 1 4. 1.02

Экстремумы функций двух переменных

Если для функции z = f(x, y) в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей области определения, верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой локального максимума*.

Если для функции z = f(x, y) в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей области определения, верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой локального минимума.*

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*. Названные условия являются *необходимыми условиями экстремума*, но не достаточными (т.е. эти условия могут выполняться и в точках, где нет экстремума). Чтобы проверить является ли критическая точка точкой экстремума, используют *достаточные условия экстремума*.

Сформулируем достаточные условия экстремума для функции двух переменных. Пусть точка $M_o(x_o, y_o)$ - критическая точка функции z = f(x, y), в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, и кроме того функция z = f(x, y) имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности точки $M_o(x_o, y_o)$. Обозначим $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция *z* имеет экстремум в точке M_o: максимум при $A < 0$, минимум при $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_o нет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследовать функцию $z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.

Решение. Находим частные производные: $z'_x = -2y^2 + 2x$, $z'_y = 4y^3 - 4xy + 2 + 2y$. Для отыскания критических точек решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2y^2+2x=0 \\ 4y^3-4xy+2+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\text{-}y^2=0 \\ 2y(y^2-x)+1+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Итак, $M_o(1,-1)$ -единственная точка, “подозрительная на экстремум”. Находим вторые частные производные: $z''_{xx}=2$, $z''_{xy}=-4y$, $z''_{yy}=12y^2-4x+2$, следовательно, A=2, B=4, C=10, $\Delta=4$, т.е. $\Delta>0$, функция имеет экстремум в точке M_o - минимум (A>0). Вычислим $z_{min}=(-1)^4-2\cdot1\cdot(-1)^2+1-2+1=-1$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание	Варианты ответа
1.	Найти критическую точку функции $Z=x^2+y^2-4x+6y+17$. В ответе указать сумму координат найденной точки.	
2.	Найти Z_{min} для функции $Z=x^2+y^2$.	
3.	Найти точки возможного экстремума функции двух переменных $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$	1. x = 1, y = 2 2. x = 2, y = 1 3. x = 2, y = 2 4. x = 1, y = 1
4.	Найти точки локального максимума функции двух переменных $z=x^3-y^3-3xy$	1. x = 1, y = -1 2. x = -1, y = 1 3. x = 0, y = 0 4. нет максимума

Неопределенный интеграл

Определение и свойства. Таблица основных неопределенных интегралов.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$ (при этом требуется, чтобы области определения функций совпадали).

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных и обозначается $\int f(x)\,dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Таким образом, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, где F(x) – первообразная функция, C – произвольное постоянное число.

Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием функции*.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, где a – постоянная.
4. $\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.
5. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция от x.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + c$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$.
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$.
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$.
6. $\int e^x dx = e^x + c$.
6. $\int a^x dx = \dfrac{a}{\ln a}^{x} + c$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$.
11. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$.
14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$.
15. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$.
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|\,x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$.

Пример.

Найти $\int \cos x\,dx$. Указать номер правильного ответа.	1) sin$x$ + π; 2) cos$x$+C; 3) cos(π/2–x)+C; 4) sin(x+π/2)+C;

Решение. Данный интеграл – табличный, поэтому ответ $\sin x + C$. Явно такого ответа нет. Если посмотреть внимательнее и учесть, что $\cos(\pi/2-x) = \sin x$, то следует выбрать третью строку и в качестве ответа ввести число 3.

Пример.

Если $F'(x)=x^{-2}$ и $F(1)=0$, то $F(-1)$ равно …	☐ –1 ☐ 1 ☑ 2 ☐ –2

Решение. По условию известна производная $F'(x)=x^{-2}$ некоторой функции $F(x)$. Требуется найти значение этой функции при $x=-1$, если известно, что сама функция $F(x)$ равна нулю, когда аргумент x равен единице. Ясно, что сначала необходимо найти саму функцию.

Решение подобного рода примеров сводится к операции интегрирования (нахождению всех первообразных для заданной функции). Когда это сделано, надо в найденном семействе найти ту функцию, которая удовлетворяет условию $F(1)=0$. И только потом можно найти интересующее нас значение, которое и будет ответом на поставленный вопрос.

Итак, $F(x)=\int x^{-2}\,dx = -1/x + C$. Из условия $F(1)=0$ имеем $-1/1 + C = 0 \Rightarrow C=1$. Таким образом, искомая функция имеет вид: $F(x) = -1/x + 1$. Следовательно, $F(-1) = -1/(-1) + 1$, т.е. $F(-1) = 2$. Глядя на колонку с ответами, должны «кликнуть» (навести курсор и щёлкнуть левую клавишу мышки) по окошку, справа от которого стоит цифра 2.

Пример.

Если $F'(x)=\sin 2x$ и $F(0)=1{,}5$, то $F(\pi/4)$ равно …	☑ 2 ☐ 1,5 ☐ 1 ☐ –2

Решение. $\int \sin 2x\,dx = 0{,}5\cdot\int \sin 2x\,d(2x) + C = -0{,}5\cdot\cos 2x + C$. Подставив $x = 0$, имеем: $-0{,}5\cdot\cos 0 + C = 1{,}5$. $\cos 0 = 1$, поэтому $C=2$. итак, $F(x) = -0{,}5\cdot\cos 2x + 2$. Следовательно, $F(\pi/4) = -0{,}5\cdot\cos(\pi/2) + 2$. $\cos(\pi/2) = 0$, поэтому $F(\pi/4) = 2$.

Пример.

Если $f(x)=2/x-3/(1+x^2)$, то $\int f(x)dx = 2\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{dx}{1+x^2} = \ln x^2 + 3\,\mathrm{arcctg}\,x + C.$ Укажите, какая ошибка или ошибки, если их несколько, сделаны в предложенной выше записи. а) всё правильно; б) использовано свойство, которого нет; в) неверно применена таблица интегралов.	☐ в; ☐ б, г; ☑ а.

Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям

Непосредственное интегрирование. Если подынтегральная функция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то можно интегрировать каждое слагаемое отдельно. Пользуясь этим, можно многие интегралы привести к сумме более простых интегралов.

Пример.

1	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$	$6x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

Решение. Разбиваем интеграл на сумму интегралов, каждый из которых оказывается табличным, и выполняем непосредственное интегрирование:

$$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx+\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx-\int \frac{2x}{\sqrt{x}}dx=6x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Замена переменной. Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной интегрирования, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x=\varphi(t)$. Определив из этой формулы $dx=\varphi'(t)dt$ и подставляя, получим $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования t будет найден, то преобразовав результат к переменной x, пользуясь исходной формулой $x=\varphi(t)$, получим искомое выражение заданною интеграла.

Пример. Вычислить неопределенный интеграл $\int \sqrt{2x-1}dx$.

Решение: В данном случае следует применить метод подстановки (замены переменной). Тогда согласно описанному алгоритму:

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{всю подынтегральную функцию } \sqrt{2x-1} \text{ принимаем за t}\\ \text{из полученного выражения определяем старую переменную } x=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\\ \text{ищем дифференциал старой переменной } dx=tdt\\ \text{от старого интеграла } \int\sqrt{2x-1}dx \text{ переходим к новому интегралу по t}\end{array}\right|=$$

$=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=$(возвращаемся к старой переменной интегрирования x) =

$$=\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+C=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

Решение: Аналогично воспользуемся подстановкой. Кратко это записывается так:

$$\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=t\\ x=t^2+2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=2\int\frac{t^2+3}{t^2+2}dt=2\int\frac{t^2+2+1}{t^2+2}dt=$$

$$=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2+2}=2t+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=2\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

Найти $\int 9\sqrt{3x-2}\,dx$	☐ $2\cdot(3x-2)^{3/2}$ ☐ $2t^3+C$ ☑ $2\cdot(3x-2)\sqrt{3x-2}+C$ ☐ $6\cdot(3x-2)^{3/2}+C$

Решение. Вынеся постоянный множитель, видим, что интеграл $\int\sqrt{3x-2}\,dx$ не табличный, но можно заметить, что подстановкой $\sqrt{3x-2}=t$ интеграл сведётся к табличному. При подстановке (замене переменной) необходимо в подынтегральном выражении всё выразить через новую переменную. Так как подынтегральное выражение содержит дифференциал (dx), то необходимо искать дифференциал новой переменной.

$d\sqrt{3x-2}=dt \Rightarrow (\sqrt{3x-2})'dx=dt \Rightarrow\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}dx=dt$. Откуда

$dx=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\,dt$. Так как $\sqrt{3x-2}=t$, имеем: $dx=\frac{2}{3}t\,dt$. Поэтому

$9\int\sqrt{3x-2}\,dx=9\cdot\int\frac{2}{3}t^2\,dt=6\int t^2dt=2t^3+C$. Первообразная найдена. Если бы не выполнялась подстановка, то полученный результат и был бы ответом. В противном случае должны вернуться к прежней переменной – переменной ***x*,** т.е. учесть, что $t=\sqrt{3x-2}$**.**

Ответ: $2\cdot(3x-2)^{3/2}+C$.

Замечание 1. В списке приведенных ответов, первая строка по причине отсутствия постоянного числа С не может быть отмечена как правильный ответ!

Замечание 2. Ответ в примерах подобного рода может быть получен гораздо быстрее. С этой целью можно использовать метод подведения под знак дифференциала, который является частным случаем метода подстановки, примененным выше.

Суть метода подведения под знак дифференциала состоит в том, что под знак дифференциала подводится некоторое выражение, и интеграл становится табличным. Именно для примеров подобного рода, когда интеграл не является табличным, но «похож» на него, т.е. почти табличный, он наиболее удобен.

Использование метода подведения под знак дифференциала основывается на факте независимости формы дифференциала от вида функции. Именно, дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента. Например, если функция $f=(3x-2)^{1/2}$ (степенная функция), то её дифференциал $df=((3x-2)^{1/2})'\cdot d(3x-2)$. Это означает, если F($x$) – первообразная функции f(x), то F(u) – первообразная функции f(u), поэтому , ∫f(u)du= F(u)+C.

Учитывая сказанное выше, подведём под знак дифференциала выражение 3x – 2, и получим табличный интеграл (интеграл от степенной функции). Всякий раз, подводя выражение под знак дифференциала надо делать проверку, не появляются ли в результате такой операции лишние множители. В нашем случае d(3x – 2)=(3x – 2)′ dx=3 dx появился лишний множитель 3. Поэтому надо перед знаком интеграла поставить компенсирующий множитель 1/3. Решение нашего примера способом подведения под знак дифференциала выглядит так:

$$\int 9\sqrt{3x-2}\,dx=9\cdot\frac{1}{3}\int(3\text{x-}2)^{1/2}\,d(3\text{x-}2)=3\cdot\frac{2(3x-2)^{3/2}}{3}+C=\cdot 2\cdot(3x-2)^{3/2}+C$$

Интегрирование по частям. Из формулы дифференциала произведения *d(uv) = u dv + v du* интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ По этой формуле отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен. Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)dx$ следует подынтегральное выражение *f(x)dx* представить в виде произведения двух множителей: *u* и *dv.*).

Следует помнить, что:

1. Обычно за dv принимаем $e^x dx$; $\sin x\,dx$; $\cos x dx$, $\frac{dx}{\cos^2 x}$, а за u – множитель при них;
2. Обычно за u принимаем $\ln\alpha x$; $\arcsin nx$; $arctg\,kx$, x^n, а за dv – множитель при них.

Пример.

Найти $\int x\cdot e^{-x}dx$	☐ $(x+1)e^{-x}+C$ ☑ $-(x+1)e^{-x}+C$ ☐ $-(x-1)e^{-x}+C$ ☐ $-x-e^{-x}+C$

Решение. Интегралы такого типа ищутся путём интегрирования по частям: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$. За функцию u следует принять x, тогда оставшаяся часть $e^{-x}\,dx$ – это dv. Чтобы найти функцию v, остаётся проинтегрировать.

$$\int x\cdot e^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^{-x}dx \\ \int dv = \int e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| =$$ (Так как C – произвольное постоянно число, то при поиске функции **v** его полагают равным нулю.)

Составляющие формулы интегрирования по частям найдены, поэтому остаётся подставить их в формулу. Получим:

$$-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример.

Найти $\int x\cos 3x\,dx$	☐ $\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + c$ ☑ $\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c$ ☐ $x\sin 3x + \cos 3x + c$ ☐ $\sin 3x + c$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Обозначим $u = x$; $dv = \cos 3x\,dx$. Тогда $du = dx$; $v = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x$. (Здесь и только здесь полагаем $c = 0$). Имеем

$$\int x\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c.$$

Задачи для самостоятельного решения

№	Условие	Возможные ответы
1.	Укажите неопределённые интегралы, при нахождении которых придётся использовать один и тот же табличный интеграл. а) $\int x\,dx$; б) $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$	☐ все; ☐ а) и б); ☐ а) и в); ☐ б) и в); ☐ другой ответ.
2.	Найти неопределённый интеграл $\int 2\sin(3-2x)\,dx$.	☐ cos(3 – 2x)+C; ☐ 0,5·cos(3 – 2x)+C; ☐ – cos(3 – 2x)+C; ☐– 2·cos(3 – 2x)+C; ☐– 4·cos(3 – 2x)+C.
3.	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4x^2-25}$.	☐ $0,5\cdot\ln\left\|\frac{x-2,5}{x+2,5}\right\|+C$; ☐ $0,2\cdot\ln\left\|\frac{2x-5}{2x+5}\right\|+C$ ☐ $0,1\cdot\ln\left\|\frac{2x-5}{2x+5}\right\|+C$ ☐ $0,05\cdot\ln\left\|\frac{x-2,5}{x+2,5}\right\|+C$.
4.	Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$.	☐ $0,5\cdot arc\sin 0,4x+C$; ☐ $-0,5\cdot arc\sin 0,4x+C$; ☐ $0,5\cdot\ln\left\|x+\sqrt{4x^2-25}\right\|+C$; ☐ $0,5\cdot\ln\left\|2x+\sqrt{4x^2-25}\right\|+C$.
5.	Найти неопределённый интеграл $\int 2\cdot e^{1-2x}dx$	☐ $-e^{1-2x}+C$; ☐ $e^{1-2x}+C$ ☐ $-2\cdot e^{1-2x}+C$ ☐ $2\cdot e^{1-2x}+C$ ☐ $-4\cdot e^{1-2x}+C$.

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^m+\ldots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_1 x+b_0},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя $(m<n)$, в противном случае дробь называется неправильной.

При интегрировании рациональной дроби её обычно представляют в виде суммы многочлена и нескольких простейших дробей, затем сумму интегрируют почленно. Интегралы простейших дробей первых трех типов приведены ниже:

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c$.

II. $\int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}=\frac{-A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+c$.

III. $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$,

где $p^2-4q<0$, т.е. квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Пример.

Вычислить неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$.	☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$ ☑ $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$ ☐ $\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C$

Данная подынтегральная функция является дробно-рациональной функцией. Здесь следует в знаменателе дроби $\frac{1}{x^2+2x+3}$ выделить полный квадрат.

$$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2 \Rightarrow \int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx \Rightarrow \int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}.$$

Используем метод подстановки:

Получим $\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\left|\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}$.

Пример. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

Решение. В знаменателе выделим полный квадрат

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Сделаем замену $x-\frac{1}{2}=t$, $x=t+\frac{1}{2}$, $dx=dt$, тогда получим:

$$\int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\ln\left|\,t^2+\frac{3}{4}\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+c = \frac{3}{2}\ln\left|\,x^2-x+1\,\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов; $m,\ldots,\ r,\ n,\ldots,\ s$ - целые числа, подстановкой $x=t^k$, (где k – наименьшее общее кратное чисел $n,\ldots s$) приводятся к интегралам от рациональных функций.

Подобным образом находятся интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx.$$

Здесь используется подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$.

Решение. Производим подстановку $x=t^6$, так как $K=НОК(2;3)$=6. Тогда $dx=6t^5dt$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} = \int \frac{6t^5dt}{t^3(t^2+1)} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6t-6arctg\,t+c = 6(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x})+c.$$

Пример. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t$, тогда

$$t^2=\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad 1+x=\frac{2t^2}{t^2+1},\quad dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1+x}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+c=2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c.$$

Пример.

Найти $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$	☐ $\sqrt{x+1}\cdot e^{-x}+C$ ☑ $2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$ ☐ $\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$ ☐ $2\left|\sqrt{x}+1\right|+C$

Решение. Произведем подстановку $\sqrt{x}=t$, тогда $x=t^2$ и $dx=2\,t\,dt$. Получим

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=\int\frac{2dt}{t+1}=2\int\frac{dt}{t+1}=2\ln\left|\,t+1\,\right|+c=2\ln\left|\,\sqrt{x}+1\,\right|+C.$$

Интегрирование некоторых видов тригонометрических функций

Основными приемами, применяемыми при интегрировании тригонометрических функций, являются тождественные преобразования подынтегральной функции с помощью формул тригонометрии (формулы приведения, понижения степени и т.д.) и метод подстановки.

Например, интегралы вида $\int\sin mx\cos nxdx$; $\int\cos mx\cos nxdx$; $\int\sin mx\sin nxdx$ находятся с помощью формул

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Пример.

Найти $\int \cos 2x \cdot \sin 5x\,dx$	☐ $\frac{1}{4}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$ ☐ $\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$ ☑ $-\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$ ☐ $-\cos 7x - \cos 3x + C$

Решение. Применив формулу $\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$, получим

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 7x + \sin 3x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 7}\int \sin 7x\,d(7x) + \frac{1}{2\cdot 3}\int \sin 3x\,d(3x) = -\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Определенный интеграл

Определение и свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Метод подстановки и интегрирование по частям

Определённый интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница, которая гласит: определённый интеграл равен приращению первообразной на отрезке интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Из формулы следует, что достаточно знать первообразную F, поэтому методы вычисления определённого интеграла практически не отличаются от методов интегрирования неопределённого. Исключение составляет метод подстановки. Различие состоит в том, что, выполняя подстановку в определённом интеграле и найдя первообразную, к прежней переменной не возвращаются, вместо этого ищут новые пределы интегрирования, подставляя в формулу, связывающую новую и старую переменные прежние пределы интегрирования.

Пример.

Вычислить $\frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$	2

Решение. Интеграл табличный, первообразная – arctg$x$. Следовательно, её приращение на отрезке [0, 1] arctg 1 – arctg 0 = π/4 – 0 = π/4. С учётом множителя, ответом является 2.

Пример.

Вычислить J = $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$. В ответе записать 3·J	32

Решение. Надо вычислить определённый интеграл. Соответствующий ему неопределённый интеграл не является табличным. Так как в подынтегральном выражении содержится корень квадратный, то сделаем замену переменной по формуле $\sqrt{1+x}=t$. Тогда $1+x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$, $dx = d(t^2-1)$, т.е. $dx = 2\,t\,dt$. Подынтегральное выражение $\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ превратится в выражение $\frac{(t^2-1)\cdot 2t\,dt}{t}$,т.е. в выражение $2\cdot(t^2-1)\,dt$, для которого найти первообразную не составит труда. Так как интеграл определённый, то следует перейти к новым пределам интегрирования. Для этого в формулу $\sqrt{1+x}=t$, по которой меняем переменную, подставим $x=3 \Rightarrow t=2$ и $x=8 \Rightarrow t=3$. Решение сведётся к вычислению определённого интеграла

I = $\int\limits_2^3 2(t^2-1)\,dt = 2\int\limits_2^3 (t^2-1)\,dt = 2(\int\limits_2^3 t^2\,dt - \int\limits_2^3 dt) = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3$ =2·(9 – 3 – 8/3+2)=32/3. Следовательно, 3·I=32.

Пример.

Вычислить $\int\limits_0^\pi x\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx$	4

Решение. Данный пример на вычисление определённого интеграла по частям. Формула получается из соответствующей формулы для неопределённого интеграла и формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

$$\int\limits_0^\pi x\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx \\ \int dv = \int \sin\frac{x}{2}dx \\ v = -2\cos\frac{x}{2} \end{array}\right| = -2x\cdot\cos\frac{x}{2}\Big|_0^\pi + 2\int\limits_0^\pi \cos\frac{x}{2}dx =$$

$= -2(\pi \cdot \cos(\pi/2) - 0 \cdot \cos 0) + 4\sin(x/2)\Big|_0^{\pi}$ $= 4\cdot(\sin(\pi/2) - \sin 0) = 4$.

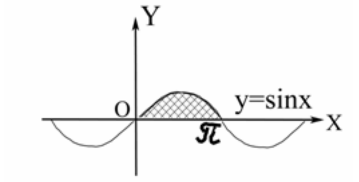
Замечание. При нахождении интегралов от $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$ использовали метод подведения под знак интеграла.

Задачи для самостоятельного решения

№	Условие	Ответ
1	Вычислить $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.	
2	Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}dx$.	
3	При помощи формулы интегрирования по частям вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin\frac{x}{2}dx$	
4	При помощи формулы интегрирования по частям вычислить определенный $\int\limits_0^{3} x \cdot e^{1/3x}dx$	
5	Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin 2x}\cos x\, dx$.	1) e; 2) $e-1$; 3) $e+1$; 4) 1; 5) $e+2$.
6	Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_0^{1} x\sqrt{5x^2+4}\, dx$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{19}{15}$; 3) $\frac{38}{15}$; 4) $\frac{19}{3}$; 5) $\frac{7}{3}$.

Приложения определенного интеграла (площади, длины линий, объемы тел вращения, экономические приложения)

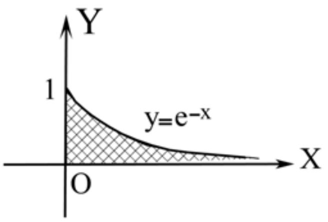
Пример.

Рассмотрев рисунок, вычислите площадь S заштрихованной фигуры. 	2

Решение. Из геометрического смысла определённого интеграла (площадь криволинейной трапеции), глядя на рисунок, следует, искомая площадь равна:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -cos\Big|_0^{\pi} = -(cos\pi - cos0) = 2$$

Пример.

Рассмотрев рисунок, вычислите площадь S заштрихованной фигуры.  В ответ запишите 2S.	2

Решение. В данном случае верхний предел интегрирования, как это видно из рисунка, равен +∞**.** Интегралы, у которых хотя бы один из пределов интегрирования равен бесконечности, относятся к несобственным. Для их вычисления вместо ∞ вводится переменная, обычно обозначаемая буквой, соответствующей пределам интегрирования в определённом интеграле, т.е. интеграл как бы сводится к определённому, и рассматривается предел, когда введенная новая переменная стремится к ∞**.**

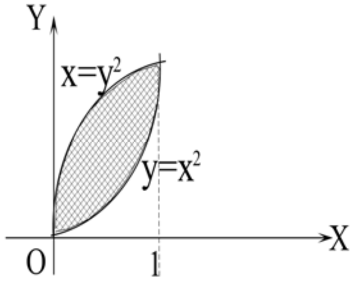
$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\int_0^{b} e^{-x}d(-x)\right) = -\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-x}d(-x) = -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^{b} ==$$

$$-\lim_{b\to+\infty}(e^{-b} - e^{0}) = -\lim_{b\to+\infty}(e^{-b} - 1) = -\lim_{b\to+\infty} e^{-b} + \lim_{b\to+\infty} 1 = 1.$$

Удвоенная площадь равна 2.

Пример.

Рассмотрев рисунок, вычислите объём V тела, полученного вращением заштрихованной фигуры вокруг оси Ox .	3



В ответ запишите $\frac{10V}{\pi}$.

Решение. Если криволинейную трапецию (фигура, заключённая между кривой y=f(x), осью Ox и прямыми x=a и x =b) вращать вокруг оси Ox, то объём получаемого при этом тела вращения равен: $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Так как в примере заштрихованная фигура получается, если от криволинейной трапеции, образуемой верхней линией вычесть криволинейную трапецию, образуемую нижней линией, то искомый объём будет равен разности двух объёмов:

$V = V_2$ - V_1, $\qquad V_1=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=0{,}5\pi$, $\qquad V_2=\pi\int_0^1 x^4\,dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=$

$=0{,}2\pi\cdot$ V=0,3π. Поэтому $\frac{10V}{\pi}$=3.

Пример. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией f(t) = 3/(3t +1) + 4.

Решение. Если непрерывная функция f(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой $V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

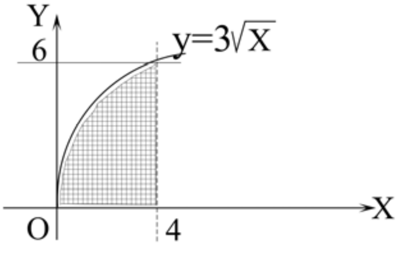
В нашем случае

$$V=\int_2^3\left(\frac{3}{3t+1}+4\right)dt=(\ln(3t+1)+4t)\,\Big|_2^3 = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4.$$

Пример. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией f(t) = 2t + 5.

Решение. Имеем: $V=\int_0^3(2t+5)dt=\left(\frac{2t^2}{2}+5t\right)\Big|_0^3=9+15=24$.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задание
1.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $$y=3\sqrt{x}+2, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=4$$
2	Рассмотрев рисунок, вычислите площадь заштрихованной фигуры. 
3.	Найти объем V тела вращения, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $f(x)=\dfrac{4}{x}, \quad x=2, \quad x=8, \quad y=0.$ В ответ записать $\dfrac{V}{\pi}$.
4.	Зная, что объем V продукции, произведенной рабочим с производительностью $p(t)$ с момента времени t_1 до момента времени t_2, вычисляется по формуле $V=\int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt$, найти V в случае $p(t)=2+3\sqrt{t}, \quad t_1=1, \quad t_2=4.$
5.	Зная, что среднее значение m издержек $K(x)$ при изменении объема производства x от a до b вычисляется по формуле $m=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b K(x)dx$, найти m в случае $$a=0, \quad b=3, \quad K(x)=-x^2+8x+9$$
6.	Зная, что среднее значение m издержек $K(x)$ при изменении объема производства x от a до b вычисляется по формуле $m=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b K(x)dx$, найти m в случае $a=0, \quad b=9, \quad K(x)=-x^2+8x+9$

Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от разрывных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Если существует конечный предел в правой части формулы, то говорят, что несобственный интеграл сходится, если же предел равен бесконечности или вообще не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

где c – любая фиксированная точка оси OX, при этом $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится только в том случае, если сходятся оба интеграла правой части.

Если функция $f(x)$ непрерывна для $x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ имеет бесконечный разрыв, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в правой части формулы, то несобственный интеграл называется сходящимся; если этот предел равен бесконечности или не существует, то интеграл называется расходящимся.

Если функция $f(x)$ непрерывна для $x\in[a;b)$ и в точке $x=a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если предел в правой части формулы существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{d\ln x}{\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{b} =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2\ln^2 e^2}\right)=\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{8}.$$

Интеграл сходится и выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = e^2$, $y = 0$ и графиком функции $y = \dfrac{1}{x\ln^3 x}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos^2 x dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{1+\cos 2x dx}{2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^b dx + \frac{1}{2\cdot 2}\int\limits_0^b \cos 2x d2x\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\Big|_0^b + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\sin 2b\right).$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin 2b$ не существует, то несобственный интеграл расходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{1+4x^2}$.

Решение.
$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+(2x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int\limits_a^0\frac{d2x}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} arctg 2x\Big|_a^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(arctg\, 0 - arctg\, a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ является неограниченной при $x = -2$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль, следовательно, в этой точке функция терпит бесконечный разрыв. Согласно определению имеем

$$\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-2+\alpha}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{x+2}\Bigg|_{-2+\alpha}^{0}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\right) = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ в точке $x = 1$ терпит бесконечный разрыв, так как знаменатель дроби обращается в нуль при $x = 1$. По определению имеем

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\int_{1+\alpha}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\int_{1+\alpha}^e \frac{d\ln x}{\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\alpha}^{e} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 e} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\alpha)}\right) = \frac{3}{2}.$$ Интеграл сходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4} ctg\, x\, dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = ctg\, x$ в точке $x = 0$ терпит бесконечный разрыв. По определению имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgx\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} ctgx\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin x}{\sin x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|\sin x|\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\sin\varepsilon|\right) = \infty.$$ Интеграл расходится.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{dx}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ терпит бесконечный разрыв. По определению имеем:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1-\varepsilon-1}+1\right) = \infty.$$

Если один из интегралов равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения

№ п/п	Задания	Варианты ответов
1.	Сколько интегралов в следующей группе являются несобственными? а) $\int_1^{+\infty} xdx$; б) $\int_1^2 \ln xdx$; в) $\int_0^2 \ln x\, xdx$; г) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; д) $\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$.	

2.	Вычислить $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{2dx}{x^2}$.	
3.	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$	1) 1; 2) e; 3) расходится; 4) $e-1$; 5) e^2.
4	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}$	1) расходится; 2) e; 3) 1; 4) -1; 5) 0.

Дифференциальные уравнения

Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ или $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, где $y = f(x)$ – искомая функция, а $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – её производные, *называется дифференциальным уравнением* n–го порядка. Последнее уравнение иногда называют дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Порядок старшей производной от неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения. Так, например, дифференциальное уравнение $y''+ x\cdot y' - x^2 = 0$ – второго порядка, а уравнение $x\cdot y' - y = 0$,– дифференциальное уравнение первого порядка..

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество на промежутке I, называется *его решением на* I, а график этой функции – *интегральной кривой*.

Процесс отыскания решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В общем случае процесс нахождения решений дифференциального уравнения n–го порядка потребует n последовательных интегрирований, поэтому общее решение будет содержать n произвольных постоянных, т.е. иметь вид $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ или $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$. Последнее называется *общим интегралом* дифференциального уравнения n–го порядка. Придавая произвольным постоянным $C_1, C_2, \dots, C_n$ конкретные числовые значения, получаем *частное решение* или *частный интеграл*.

Конкретные значения произвольных постоянных определяются из дополнительных условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение. Условия, задающие значения функции и её первых производных до порядка $n-1$ включительно, называют *начальными условиями* или *условиями Коши*, а соответствующую задачу – *задачей Коши*.

ДУ первого порядка (с разделенными и разделяющимися переменными, однородные ДУ и приводимые к ним, ДУ в полных дифференциалах)

Уравнение вида $F(x, y, y,') = 0$ или $y' = f(x, y)$ – *дифференциальные уравнения первого порядка*. Их общие решения $y = \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$. Подставляя начальное условие $y(x_o) = y_o$ в общие решения, из уравнений $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$, найдём соответствующее значение $C = C_0$. Геометрически это означает, что среди интегральных кривых найдена кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$. Заметим, что могут быть случаи, когда из общего решения дифференциального уравнения, некоторые решения не получаются ни при каких с значениях C. Такие решения называются *особыми*.

Пример.

Условие	Ответ
Является ли функция $y = Cx$ решением дифференциального уравнения $x \cdot y' - y = 0$?	☑ Да ☐ Нет

Решение. Найдём производную от функции, о которой говорится в условии, получим $y' = C$. Подставим в данное уравнение $y = Cx$ и $y' = C$, получим $x \cdot C - C \cdot x = 0$, т.е. 0=0. Так как получили верное равнство, то функция $y = Cx$ является решением дифференциального уравнения $x \cdot y' - y = 0$.

Пример.

№	Условие	Ответ
1.	Является ли функция $y = x(x+1) + C$ решением дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$?	☐ да ☑нет

Решение. $y = x(x+1) + C \Rightarrow y' = (x(x+1) + C)' \Rightarrow y' = x + 1 + x$, т.е. $y' = 2x + 1$. Так как отношение dy / dx – другое обозначение производной, то данная функция не является решением данного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x \cdot (y + 1) - (x^2 + 1) \cdot y' = 0$.

Решение. Данное уравнение, как уравнение, содержащее неизвестную функцию y, её производную y' и независимую переменную x, – дифференциальное уравнение первого порядка. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем уравнение в *дифференциалах:* $x \cdot (y + 1) \cdot dx - (x^2 + 1) \cdot dy = 0$. Видно, при дифференциалах стоят произведения функций, зависящих только от x – при dx, и от y – при . dy.

Уравнение вида $M(x) \cdot N(y) \cdot dx + P(x) \cdot Q(y) \cdot dy = 0$ называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными*. Разделив обе части уравнения на произведение $P(x) \cdot N(y) \neq 0$, придём к уравнению

$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$. Остается найти первообразные $F_1(x) = \int \frac{M(x)}{P(x)}dx$, $F_2(x) = \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy$ и записать ответ: $F_1(x) + F_2(x) = C$, .где С – произвольная постоянная.

В нашем конкретном случае делим обе части уравнения на произведение $(x^2+1)\cdot(y+1) \neq 0$, получим $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{y\,dy}{y+1} = C$. В первом интеграле применим подведение под знак интеграла

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C_2.$$

Во втором интеграле в числителе добавим и вычтем единицу и рассмотрим разность интегралов.

$$\int \frac{y+1-1}{y+1}dy = \int dy - \int \frac{dy}{y-1} = y - \ln\left|y-1\right| + C_3.$$

Положив $C_2 = C_3 = 0$, получаем общий интеграл: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| = C_1$.

Его можно переписать в виде $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| =$ ln C, где $\ln C = C_1 > 0$ – замена константы C_1. Обычно так поступают в примерах, подобных данному, когда в результате интегрирования появляется логарифмическая функция. Следовательно, $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| =$ ln C. Откуда, так как $y = \ln e^y$, окончательно получаем общий интеграл $\sqrt{x^2+1} = \frac{Ce^y}{|y+1|}$, $C > 0$, или: $\sqrt{x^2+1} = \frac{Ce^y}{y+1}$, $C \neq 0$.

Решение искали при условии $(x^2+1)\cdot(y+1) \neq 0$. Рассмотрим, что получится, если этим условием пренебречь. Первый множитель x^2+1 не может равняться нулю. Второй может равняться нулю, если $y = -1$. Может ли полученная функция $y(x) = -1$ быть решением нашего уравнения? Чтобы ответить на этот вопрос, подставим её в уравнение. Итак, $y(x) = -1$, $y'(x) = 0$, $x\cdot(y+1)\cdot dx - (x^2+1)\cdot dy = 0 \Rightarrow x\cdot(-1+1)\,dx - (x^2+1)\cdot 0 = 0$, т.е. $0 = 0$ – верное тождество. Поэтому $y = -1$ – решение уравнения. Это особое решение, так как оно не может быть получено из общего решения ни при каком значении постоянной С.

Задачи для самостоятельного решения

1	Решением уравнения $xy' = 1$ является: 1) 1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $y = -\frac{1}{x^2}$; 4) $y = e^x$; 5) $y = \ln x$.
2	Общее решение уравнения $y' + 2xy = 0$ имеет вид $y = Ce^{-x^2}$. Частным решением данного уравнения, удовлетворяющим условию $y = 1$ при $x = 1$, является: 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = e^{-x^2+1}$; 3) $y = 2e^{-x^2}$; 4) $y = e^0$; 5) $y = e^{-x^2+2}$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

где p(x), q(x) – непрерывные функции в некоторой области, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Подстановка $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ –неизвестные функции, производные которых непрерывны, приводит к общему решению, которое записывается в виде

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Пример. Решить уравнение $y' + 2x \cdot y = 2x^2 \cdot e^{-x^2}$.

Решение. Это линейное дифференциальное уравнением первого порядка, в котором p(x)= $2x$, q(x) = $2x^2 \cdot e^{-x^2}$. Поэтому согласно формуле $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$ (при промежуточном интегрировании постоянную C можно выбрать произвольно, чаще всего она полагается равной нулю!). Далее, другой интеграл $\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx = \int 2x^2 \cdot e^{x^2} e^{-x^2} dx = x^3/3 + C$.

Итак, общее решение есть $y = e^{-x^2} \cdot (x^3/3 + C)$.

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	Варианты ответов
1	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:	1) $y' + p(x)y^2 = q(x)$; 2) $y^2 + p(x)y = q(x)$; 3) $y = ax + b$; 4) $y' + p(x)y = q(x)$; 5) $P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y = 0$.
2	Общее решение уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:	1) $y = e^x + C$; 2) $y = e^x(x + C)$; 3) $y = e^{x+C}$; 4) $y = x(e^x + C)$; 5) $y = (x + C)(e^x + C)$.

Линейные ДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка

Дифференциальное уравнени вида

$$y'' + \mathrm{p}(x)\cdot y' + \mathrm{q}(x)\cdot y = \mathrm{f}(x),$$

где p(x), q(x) и f(x) – непрерывные функции в некоторой области, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка*.

Если f(x) = 0, уравнение называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением второго порядка.

Если p(x), q(x) – постоянные величины (обозначим их p, q), то уравнение называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*:

$$y'' + \mathrm{p}\cdot y' + \mathrm{q}\cdot y = 0$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + \frac{9}{2}y = 0$.

Данное уравнение является линейным дифференциальным однородным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + py' + qy = 0$. Решается оно методом Эйлера, который заключается в следующем:

1. По коэффициентам исходного уравнения составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0,$$

то есть получаем обычное квадратное уравнение.

2. Вычисляем его дискриминант $D = p^2 - 4q$.

3. В зависимости от полученного значения дискриминанта D имеем следующий вид общего решения (см. таблицу 1).

Таблица 1

D>0– два различных действительных корня k_1 и k_2: $k_{1,2}=(-p\pm\sqrt{D})/2$	D=0 - один действительный корень k кратности 2: $k=-p/2$	D<0 – два комплексных корня $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-\beta i$ $\alpha=-p/2,\ \beta=\sqrt{-D}/2$
Общее решение		
$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$	$y=e^{kx}(C_1+C_2\cdot x)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$

Таким образом, в соответствии с методом Эйлера для нашего примера составляем характеристическое уравнение $k^2-3k+\frac{9}{2}=0$. Его дискриминант отрицателен: $D=p^2-4q=3^2-4\cdot 9/2=9-18=-9<0$. Значит, общее решение имеет вид $y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$ с параметрами $\alpha=1{,}5$, $\beta=1{,}5$.

Ответ: $y=e^{1,5x}\left(C_1\sin 1{,}5x+C_2\cos 1{,}5x\right)$.

Пример.

Для каждого из линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в левом столбце, укажите соответствующее ему характеристическое уравнение из правого столбца.		
$y''+4\cdot y'=0$		$k^2+4\cdot k=0$
$y''+4\cdot y=0$		$k^2+4=0$
$y''+8\cdot y+16=0$		$(k+4)^2=0$

Пример.

Для каждого характеристического уравнения расположенного в левом столбце, укажите соответствующее ему линейное однородное дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами из правого столбца.		
$k^2+4\cdot k=0$		$y''+4\cdot y'=0$
$k^2+4=0$		$y''+4\cdot y=0$
$(k+4)^2=0$		$y''+8\cdot y+16=0$

Пример.

Для каждого из линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в левом столбце укажите соответствующее ему общее решение из левого столбца.		
$y''+4\cdot y'=0$		$y=C_1+C_2\cdot e^{-4X}$

$y'' + 4\cdot y = 0$ $y'' + 8\cdot y + 16 = 0$		$(C_1\cdot\cos 2x + C_2\cdot\sin 2x)$ $y = (C_1 + C_2\cdot x)\cdot e^{-4X}$

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	Варианты ответов
1	Общее решение уравнения $y'' - y' - 12y = 0$ имеет вид:	1) $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$; 2) $y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$; 3) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}$; 4) $y = e^{4x}(C_1x + C_2)$;
2	Частным решением уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющим условиям $y = 2,\ y' = 1$ при $x = 0$, является:	1) $y = 2e^{x}$; 2) $y = e^{x}(2 + x)$; 3) $y = e^{x} + e^{-x}$; 4) $y = e^{x}(2 - x)$;

Числовые и степенные ряды

Числовой ряд – это выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

где $a_1, a_2, \ldots, a \ldots$ – *члены* числового ряда (действительные числа); a_n– n-ый (общий) член.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, – n-ая *частичная сумма*, то ряд называется *сходящимся* (число S – *сумма* ряда), в противном случае – *расходящимся*.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (*необходимый признак* сходимости).

Из этого признака, как следствие, вытекает: *достаточное условие расходимости* числового ряда: если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Например, если дан ряд

$$1/5 + 2/8 + 3/11 + 4/14 + \ldots + n/(3n+2) + \ldots$$

то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n+3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n} = 1/3 \neq 0$. Следовательно, данный ряд расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$=1+ 1/2+ 1/3+ …+ 1/ n + … называется *гармоническим.* Можно показать, что он расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$ называют *обобщенным гармоническим.* Он расходится при $\alpha \le 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$ =a + a·q+ a·q^2 +… + a·q^n +… представляет собой обычную *геометрическую прогрессию.* Если |q | < 1 – ряд сходится, если |q | ≥ 1 – расходится.

Зная эти три ряда и признаки сравнения, можно легко решать многие тестовые задачи на сходимость знакопостоянных числовых рядов.

Первый признак сравнения. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$$

с неотрицательными членами: Если для всех n, или начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Иначе говоря, *если «больший» ряд сходится, то и «меньший» ряд сходится; если «меньший» ряд расходится, то и «больший» ряд расходится.*

Второй признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \ne 0, \quad L \ne \infty,$ то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ вопрос остается открытым — нужно применять другие признаки.

Признак Даламбера удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы (!) и степени.

Признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, а при $l = 1$ вопрос остается открытым.

Интегральный признак. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,}$ $a_n > 0$, не возрастают $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ и существует функция $f(x)$, которая определена на промежутке $\left[1;+\infty\right)$, непрерывна, не возрастает и $a_n = f(n)$, $n = 1,2,\ldots$, то для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходился.

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится как геометрический ряд со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. Имеем $\frac{2^n}{1+2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}$ для всех n, значит, на основании первого признака сравнения ряд сходится.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Поскольку $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится, то на основании первого признака сравнения заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-3n+5}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{(n^2-3n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2-\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=2.$$

Поскольку $2\neq 0$, то на основании второго признака сравнения заключаем, что исследуемый ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение. Так как $a_n=\frac{n!}{5^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, то $l=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,5^n}{5^{n+1}\,n!}=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)\,5^n}{5^n\cdot 5\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty$. Так как $\infty>1$, то исследуемый ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$.

Решение. Применим признак Коши, для чего найдем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{3}.$$

Так как $e\approx 2{,}72$ и $\frac{e}{3}<1$, то на основании признака Коши заключаем, что исследуемый ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши-Маклорена. Заменяя в формуле общего члена $a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ число n на переменную x, получаем функцию $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Вычисляем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^{B}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\lim_{B\to+\infty}\ln(\ln(x+1))\Big|_1^B=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}(\ln(\ln B)-\ln(\ln 2))=\infty.$$

Интеграл расходится, и следовательно, исходный числовой ряд также расходится.

Задачи для самостоятельного решения

№	Задание	Варианты ответов
1.	Если n-й член числового ряда $a_n = (-1)^{n-1}(3n+2)$, то сумма $a_4 + a_5$ равна	1) 2; 2) 3; 3) –31 ; 4) 32; 5) другой ответ.
2.	Найти $(n+1)$-й член a_{n+1} ряда, n-й член которого $a_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$.	1) $\dfrac{3n+3}{2n}$; 2) $\dfrac{3n+4}{2n+1}$; 3) $\dfrac{3n+5}{2n+1}$; 4) $\dfrac{3n+6}{2n+2}$; 5) другой ответ.
3.	Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$. Укажите верные утверждения: а) если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ остается открытым; в) если $l > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится; с) если $l < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.	1) все утверждения верны; 2) все утверждения неверны; 3) верно только а); 4) верно только в); 5) верно только с).
4.	Написать формулу общего члена ряда $\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{11} + \dfrac{4}{14} + \ldots$.	1) $\dfrac{n}{n+5}$; 2) $\dfrac{n}{5n+1}$; 3) $\dfrac{n}{3n+1}$; 4) $\dfrac{n}{6n-1}$; 5) $\dfrac{n}{3n+2}$.
5	Какие из рядов 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^2+8}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5n}{n^3+4}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n}$; являются знакопостоянными?	1) 1, 2, 4, 5; 2) 1, 2, 4; 3) 2, 4, 5; 4) 2, 4; 5) Все.
6	Для каких из рядов 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^3-2}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n}{5n^2-3}$;	1) 1, 2, 3, 5; 2) Для всех; 3) 4; 4) 2, 3; 5) 1, 4, 5.

	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда?	
7	Какие из данных рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$ являются сходящимися?	1) Все; 2) 1, 2, 5; 3) 3, 4; 4) 2, 3, 4; 5) 1, 2, 3, 4.
8	Для каких рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\, n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n}$ применение признака Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда?	1) Для всех; 2) 1, 2, 5; 3) 2, 3, 4; 4) 1, 5; 5) 2, 3, 5.
9.	С помощью признаков сравнения, установить какие из перечисленных рядов сходятся: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$	1) а); в) 2) все, кроме в) 3) только а) 4) а); г) 5) другой ответ
10.	С помощью интегрального признака установить, какие из перечисленных рядов сходятся: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-6a+13}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$	1) только а) 2) а); в); г) 3) а); в) 4) б); г) 5) все

Знакопеременные ряды

Если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные действительные числа, то ряд называется *знакопеременным*. Частный случай знакопеременного ряда – *знакочередующийся* ряд $a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$, где все a_i положительные числа. Любые два его соседних члена имеют различные знаки.

Знакопеременные ряды исследуются на *абсолютную* и *условную* сходимости.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если *сходится* ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, составленный *из абсолютных величин* членов знакопеременного ряда. Если же ряд, составленный *из абсолютных величин* членов знакопеременного ряда *расходится*, а сам *знакопеременный* ряд *сходится*, то такой знакопеременный ряд называется *условно* сходящимся.

Сходимость знакочередующегося ряда исследуется при помощи **признака Лейбница**: если члены знакочередующегося ряда убывают $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то знакочередующийся ряд *сходится* и его сумма не превосходит первого члена ряда, т.е. $S \le a_1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $-1+1/2-1/3+\ldots+(-1)^n/n+\ldots$

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Исследуем его на абсолютную и условную сходимости. Составим ряд, взяв члены ряда по абсолютной величине, получим гармонический ряд $1+1/2+1/3+\ldots+1/n+\ldots$. Он расходится, поэтому абсолютной сходимости нет. Возможна условная сходимость, для этого проверим, выполняются ли условия признака Лейбница. Члены ряда убывают $(1 < 1/2 < 1/3 \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$, следовательно, сам знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: Ряд условно сходящийся.

Пример.

Если $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ - некоторые действительные числа, то среди записей: a) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$; b) $a_1+a_2+\ldots+a_n$; c) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots$; d) $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$; e) $-a_1-a_2-\ldots-a_n-\ldots$; числовыми рядами являются:	☐все записи; ☐ все, кроме первых двух; ☐ только запись d); ☐ только запись e); ☐другой ответ.

Решение. Все записи быть не могут, так как записи a), b), c) не являются числовыми рядами. Только записи d) и e) удовлетворяют требованию. Среди возможных ответов такого ответа нет. Поэтому в столбце ответов следует выбрать последнюю строчку: «другой ответ».

Пример 31.

Среди числовых рядов: a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2$ сходящимися являются….	☐ только a); ☐ только b); ☐ все; ☐ ни один; ☐ только b) и c).

Решение. Глядя на **n-**ый член каждого ряда и проверяя необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ **),** видим**,** что для рядов a) и d) он не выполняется. Ряд c) сходится условно (см пример выше). Ряд b) – геометрический с |q |=1/2, что меньше 1, поэтому он сходится **.** Среди предложенных рядов только ряды b) и c) – сходящиеся**.**

Задачи для самостоятельного решения

	Формулировка вопроса	
1	Формула общего члена ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$ имеет вид… 1) $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$; 2) $a_n=\frac{1}{2n}$; 3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 4) $a_n=-\frac{1}{2^n}$; 5) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$	
2	Какие из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n^4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-n^2}{3^n}$ являются знакочередующимися?	1) Все; 2) 3, 4, 5; 3) 3, 4; 4) 1, 3, 4, 5; 5) 1, 3, 4.
3	Какой из данных рядов сходится условно? $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6n+5}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}$	
4	Сколько слагаемых необходимо взять, чтобы найти сумму ряда $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+\frac{5}{243}-\frac{6}{729}+\frac{7}{2187}-\ldots$ с точностью 0,01?	

Сходимость степенных рядов. Применение рядов в приближенных вычислениях

Выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n x^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots$ где $C_1, C_2, \ldots, C_n\ldots$ – действительные числа (коэффициенты степенного ряда), x – переменная, $a_n=C_nx^n$ – n-ый (общий) член, называется *степенным рядом.*

Подставив в степенной ряд конкретное значение переменной, например $x = x_0$, получим числовой ряд. Этот ряд может сходиться, а может и расходиться.

Множество D значений переменной x, при которых ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда.

Неотрицательное число R, такое, что при $|x| < R$ *ряд сходится*, а при $|x| > R$ – расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ радиус сходимости определяется формулой:

$$R = \lim_{n\to+\infty}(C_n / C_{n+1}).$$

Из понятия радиуса сходимости ясно, что если известен радиус R, то ряд сходится на интервале (–R; R), вне этого интервала – расходится. Интервал (–R; R) называется *интервалом сходимости* степенного ряда. На концах интервала сходимости, т.е. при $x = -R$ и $x = R$, ряд может как сходиться, так и расходиться. Поэтому для нахождения области сходимости надо исследовать сходимость ряда при $x = -R$ и $x = R$. Результаты исследования и позволят ответить на поставленный вопрос.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$.

Решение. Так как $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, то $C_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$. Радиус сходимости R будет равен: $R = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n} \Big/ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = 2$. Следовательно, интервал сходимости (–2; 2). Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Подставляя в степенной ряд значение $x = -2$, получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$, т. е. $1+1+1+1+\cdots$. Для полученного ряда необходимое условие не выполняется ($\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$). То же самое будет, если подставить в степенной ряд значение $x = 2$. Получим $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^n}{2^n}$, т.е. $\sum (-1)^n$ – ряд расходится. Проведенное исследование показало: найденный интервал сходимости одновременно будет и областью сходимости степенного ряда.

Пример 32.

Если a_i – действительные числа, а x – переменная, то среди выражений: a) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^n + \ldots$; b) $-x - x - x - \ldots - x - \ldots$; c) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$; d) $-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - \ldots$. степенными рядами являются ….	☐ все; ☑ ни одно; ☐ только c); ☐ другой ответ.

Решение. а) и d) – числовые ряды. Оставшихся два ряда, - функциональные, но не степенные, так как составлены из функций, не являющимися целыми положительными степенями переменной ***x*.** Поэтому правильный ответ: ни одно из предложенных выражений не является степенным рядом.

Пример 33.

Если $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$ – степенной ряд, то его радиус сходимости равен… 1) ∞; 2) 5; 3)1; 4) 0,2; 5) 0.	☐ ∞; ☐ 2; ☐ 1; ☑ 0,2;

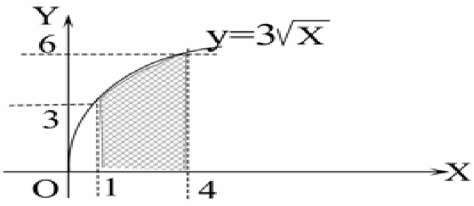
Решение. $C_n=\frac{5^n}{\sqrt{n}}$, $C_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\frac{1}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

№	Задание	Варианты ответов
1	Найти длину интервала сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
2	Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-6)^n$ равен 2. Найти интервал сходимости.	1) (0; 2); 2) (–2; 2); 3) (–1; 1); 4) (4; 8); 5) (2; 6).
3	Вычислить приближенно значение выражения $1000\cdot\cos 0{,}5$, ограничиваясь суммой первых двух членов ряда Маклорена для функции $\cos x$.	1) 500; 2) $\frac{1000\pi}{3}$; 3) 1125; 4) 1000; 5) 875.
4	Какие из рядов 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-5)^n}{n^4}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+5)^{n+1}}{n!}$;5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{n^3}$ являются степенными?	1. 2, 3, 4; 2. Все; 3. 1, 3, 4; 4. 2, 3; 5. 2, 3, 4, 5.

Примерные варианты тестов

Вариант 1

№	Задание	Варианты ответов
1	Рассмотрев рисунок, вычислите площадь заштрихованной фигуры.  	
2	Найти неопределённый интеграл $\int 2\sin(3-2x)\,dx$.	1) cos(3 – 2x)+C; 2) 0,5·cos(3 – 2x)+C; 3) cos(3 – 2x)+C; 4) 2·cos(3 – 2x)+C; 5) – 4·cos(3 – 2x)+C.
3	Вычислить частную производную по x функции двух переменных $f(x,y)=\dfrac{y-3x}{x+3y}$ в точке (2;1)	1) - 0.4 2) 0.4 3) 0.8 4) -0.8
4	Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется:	1) $f(x)+C$; 2) $F(x)$; 3) $F(x)+C$.
5	При помощи формулы интегрирования по частям вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi}(2x+3)\cos x\,dx$	1) -2π 2) -4 3) π 4) 2 5) -2
6	Общее решение уравнения $y'+y=2xe^{-x}$ имеет вид:	1) $y=e^{-x}+C$ 2) $y=e^{-x}(x^2+C)$ 3) $y=e^{x-C}$ 4) $y=x^2(e^{-x}+C)$ 5) $y=(x^2+C)(e^{-x}+C)$
7	Для каких из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2-2}{n^2+4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5n^2+8}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ выполняется необходимое условие сходимости ряда?	
8	Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}(x+4)^n$ равен …	

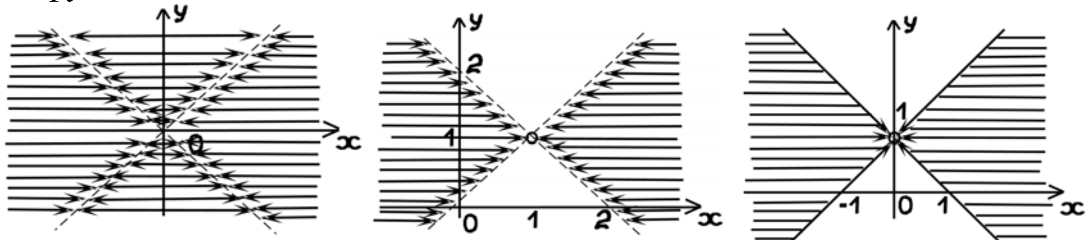
Вариант 2

№	Задание	Варианты ответов
1	Какой из данных рядов сходится условно? 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6n+5}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}$	
2	Найти точки возможного экстремума функции двух переменных $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$	1) x = 1, y = 2 2) x = 2, y = 1 3) x = 2, y = 2 4) x = 1, y = 1
3	Найти $\int\cos 2x\cdot\sin 5x\,dx$	1) $\frac{1}{4}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$ 2) $\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$ 3) $-\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$ 4) $-\cos 7x-\cos 3x+C$
4	Решением уравнения $y'-1=\operatorname{tg}^2 x$ является:	1) $y=\cos x$; 2) $y=e^x$; 3) $y=\operatorname{ctg} x$; 4) $y=\operatorname{tg} x$; 5) $y=\sin x+C$.
5	Укажите, какой ответ правильно отражает свойства неопределенного интеграла: 1) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$; $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$; $\int f(x+b)dx=\int f(x)dx+\int f($ 2) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$; $a\int f(x)dx=\int af(x)dx$; $\int f(x+b)dx=F(x+b)$ 3) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$; $\int af(x)dx=F(x\cdot a)+C$; $\int f(x+b)dx=F(x+b$	
6	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx$	1) Расходится 2) 1 3) *e* 4) -1 5) -*e*
7	Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}$. Указание: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.	1) (-1; 1) 2) $(0;+\infty)$ 3) $(-\infty;0)$ 4) $\{0\}$ 5) $(-\infty;+\infty)$
8	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=6\sqrt{x}+4,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=4$	

Вариант 3

1.	Если $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, то z'_y равно … 1) xy; 2) $\dfrac{x^2}{y}$; 3) $\dfrac{x}{y^2}$; 4) $\dfrac{x}{y}$; 5) $\ln\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}$
2.	Если функция двух переменных $z = x^3 + y^3 - 12xy + 67$ $(x>0,\ y>0)$, то её минимум $z_{\min}$ равен…
3.	Среди перечисленных рядов гармоническим рядом называется: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; б) 1+2+3+4+…+$n$+…; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$
4.	Найти неопределённый интеграл $\int\cos(1-4x)\,dx$ 1) 0,25sin(4x -1)+C 2) 0,25sin(1 - 4x)+C 3) sin(4x - 1)+C 4) sin(1 - 4x)+C 5) 4sin(1 - 4x)+C
5.	Вычислить $\int\limits_0^2 x\cdot e^{0,5x}dx$.
6.	Сколько интегралов в следующей группе являются несобственными? а) $\int\limits_1^{+\infty}xdx$; б) $\int\limits_1^2\ln xdx$; в) $\int\limits_0^2\ln x\,xdx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\dfrac{dx}{x^2}$; д) $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x+1}$.
7.	Решением уравнения $xy' = 1$ является: 1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $y = -\dfrac{1}{x^2}$; 4) $y = e^x$; 5) $y = \ln x$.
8.	Если a_i – действительные числа, а x – переменная, то среди выражений: a) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^n + \ldots$; b) $x - x - x - \ldots - x - \ldots$; c) $1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\ldots+\dfrac{1}{x^n}+\ldots$; d) $a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - \ldots$. степенными рядами являются … 1) все; 2) ни одно; 3) только c); 4) другой ответ.

Вариант 4

1.	Если функция $z=\dfrac{1}{y^2-x^2}$, то на плоскости $x\text{O}y$ область определения функции имеет вид…  Рис 2 Рис 4 Рис 5 В ответе запишите номер рисунка.
2.	Найти полный дифференциал функции $Z=x^2+3xy+y^2$ в точке $M_0(1,2)$: 1) $7dx+8dy$; 2) $-8dx+7dy$; 3) $8dx+7dy$;.4) $12dx+9dy$
3.	Общее решение уравнения $y''-y'-12y=0$ имеет вид: 1) $y=e^{-x}(C_1x+C_2)$; 2) $y=e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$; 3) $y=e^{4x}(C_1x+C_2)$; 4) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$;
4.	Вычислить $\int\limits_{-0,2}^{0} 50x\cdot e^{-5x}dx$
5.	Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{e}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$: 1) 1; 2) e; 3) расходится; 4) $e-1$;
6.	Вычислить приближенно значение выражения $36\cdot\sin 1$, ограничиваясь суммой первых двух членов ряда Маклорена. 1) 30 2) 36 3) 0 4) 18~ 5) 18
7.	Формула общего члена ряда $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\ldots$ имеет вид… $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$; 2) $a_n=\dfrac{1}{2n}$; 3) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$;4) $a_n=-\dfrac{1}{2^n}$; 5) $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+2}$
8.	Зная, что среднее значение m издержек $K(x)$ при изменении объема производства x от a до b вычисляется по формуле $$m=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b K(x)dx,$$ найти m в случае $a=0$, $b=3$, $K(x)=-x^2+8x+9$

Вариант 5

1.	Вычислить полный дифференциал функции $z = arctg(y/x)$ в точке $x = 2, \quad y = 2$ при $\Delta x = 0.1, \quad \Delta y = 0.1$ 1) – 0.1 2) 0.1; 3) 0; 4) 0.2
2.	Если функция двух переменных $z = x^3 - 3xy + y^3 + 8 \ (x > 0, \ y > 0)$, то её минимум $z_{\min}$ равен…
3.	Вычислить $\int\limits_0^{0,5} 12x \cdot e^{2x} dx$
4.	Сколько интегралов в следующей группе являются несобственными? а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; д) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
5.	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:; 1) $y^2 + p(x)y = q(x)$; 2) $y = ax + b$; 3) $y' + p(x)y = q(x)$; 4) $P(x;y)\,\mathrm{dx} + Q(x;y)\,\mathrm{dy} = 0$ 5) $y' + p(x)y^2 = q(x)$
6.	Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.
7.	Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x} + 2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

8.	Для каких рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(n+1)}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}^n\, n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$ применение признака Коши не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда?	1) 1, 2, 5 2) 2, 3, 4 3) 1, 3, 5 4) 2, 3, 5